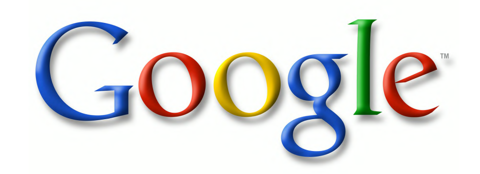
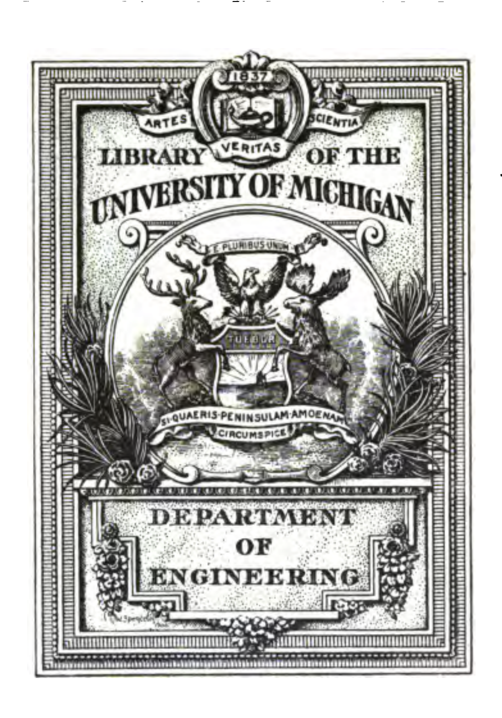





1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING




1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING

HYDROMECHANIK

VON

DR. M. RÜHLMANN,
PROFESSOR IN HANNOVER.

ERSTES HEFT.

HYDROSTATIK UND AËROSTATIK.

LEIPZIG.
ARNOLD'SCHE BUCHHANDLUNG.
1853.

Schrift und Druck von Fr. Culemann in Hannover.

Hydromechanik.

Allgemeine Einleitung.

§. 1.

Flüssig heißt jeder Körper, dessen Theile derartig äußerst leicht verschiebbar sind, daß er jede selbstständige Gestalt entbehrt, diese vielmehr von dem Gefäße bestimmt wird, in welchem er eingeschlossen ist und von den Kräften, welche auf ihn einwirken.

Da es bis jetzt, streng genommen, nicht möglich gewesen ist, die Grenze anzugeben, wo die feste Körperform aufhört und die flüssige anfängt, so nimmt man in der Mechanik die flüssigen Körper als absolut flüssig, d. h. als solche an, welche die Eigenschaft der leichten Verschiebbarkeit im höchsten Grade besitzen. Letzterer Annahme folgen wir stets, wenn das Gegentheil nicht besonders bemerkt wird.

§. 2.

Hinsichtlich bestimmt hervortretender physikalischer Eigenschaften hat man zwei Arten von Flüssigkeiten zu unterscheiden. Bei der einen Art hängen die Theilchen mit einer äußerst geringen, meist Null zu setzenden Attractionskraft (Cohäsion) zusammen, während bei der anderen Art diese Kraft nicht nur gänzlich fehlt, sondern den Theilchen eine Repulsivkraft (Expansivkraft) innewohnt, die ihnen ein stetes Ausdehnungsbestreben ertheilt.

Vermöge dieser Eigenschaft kann ein bestimmtes Volumen auch nur erhalten werden, wenn dasselbe von allen Seiten durch Gefäßwände begränzt oder überall von äußeren Kräften gedrückt wird.

Eine minder physikalisch scharfe, jedoch technisch völlig zulässige Eintheilung der flüssigen Körper ist die in unelastische und in elastische Flüssigkeiten. Unter ersteren versteht man solche, deren Volumen durch Einwirkung äußerer Kräfte oder der Wärme verhältnißmäßig höchst wenig verändert werden kann, während letztere die flüssigen Körper begreift, welche diese Veränderung unter denselben Verhältnissen im höchsten Grade zeigen.

Zu den Flüssigkeiten der ersteren Art gehören Wasser, Quecksilber, Alkohol etc. und man nennt diese auch tropfbare Flüssigkeiten, weil ihre kleinsten Theilchen unter gewissen Umständen als Tropfen erscheinen können.*) Flüssigkeiten der zweiten Gattung sind die atmosphärische Luft und alle luftförmigen Körper oder Gase, wie Sauerstoff-, Stickstoff-, Wasserstoff-Gas etc.

Eine besondere Art elastischer Flüssigkeiten sind die, welche man Dämpfe nennt, deren Unterschied von den Gasen jedoch nur durch gewisse Grenzen der Temperatur und des äußeren Drucks bedingt wird.

In der Folge wählen wir als Repräsentant der tropfbaren Flüssigkeiten das Wasser und ebenso für die luftförmigen Flüssigkeiten die atmosphärische Luft.

§. 3.

Die Wissenschaft, welche untersucht, inwiefern Kräfte, welche auf flüssige Körper einwirken, denselben Gleichgewicht oder Bewegung zu ertheilen vermögen, wird Mechanik flüssiger Körper (Hydromechanik) genannt. Hiernach und mit Berücksichtigung der vorher bemerkten zwei Flüssigkeitsformen, ergiebt sich die Eintheilung der Hydromechanik von selbst, nämlich in Hydrostatik, Aerostatik, Hydrodynamik und Aerodynamik. Letztere beiden faßt man auch unter dem gemeinschaftlichen Namen Hydraulik zusammen.

---

*) Unter dem Drucke von 1,0336 Kil. auf 1 Quadrat-Centimeter, oder 14,7 ℔ engl. auf 1 Quadratzoll engl., oder 13,08 ℔ hannov. auf 1 Quadratzoll hannov. etc. (einer Atmosphäre) wird, um Millionentheile des ursprünglichen Volumens zusammengedrückt:

	Nach Oerstedt bei 3,75° C.	Nach Colladon u. Sturm bei 10° C.	Nach Aimé bei 12,6 C.
Quecksilber . .	?	5,03	4,0
Wasser.	46,77	50,5	50,2

Man sehe hierüber: Oerstedt in Poggend. Annalen. Bd. 9. S. 603. Bd. 12. S. 158. Bd. 31. S. 362. — Colladon u. St. a. a. O. Bd. 12. S. 39. — Aimé. Ebendaselbst. 2. Ergänzungsbd. S. 228.

Erste Abtheilung.

Hydrostatik.

Erstes Kapitel.

§. 4.

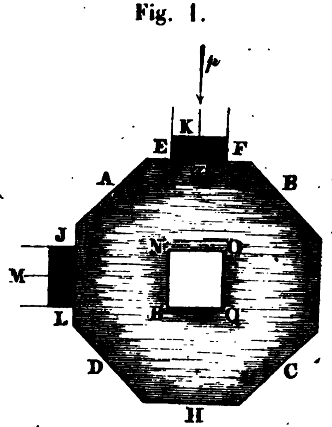
Wäre uns Gestalt, Größe und Verbindungsart der Theile flüssiger Körper bekannt, so ist es wenigstens wahrscheinlich, daß sich die Gesetze des Gleichgewichts derselben aus jenen ableiten lassen würden, welche für feste Körper gefunden worden sind. Da dies jedoch (bis jetzt) nicht der Fall ist, so sind wir genöthigt, eine charakteristische Eigenschaft der flüssigen Körper aufzusuchen und solche als Grundgesetz zur Ableitung der Lehren des Gleichgewichts zu benutzen. Eine solche folgt aber unmittelbar aus der leichten Verschiebbarkeit der Theile eines flüssigen Körpers, und man kann sie auf folgende Weise ausdrücken:

»Wird auf einen flüssigen Körper ein Druck ausgeübt, und bleibt ersterer dabei im Gleichgewicht, so pflanzt sich dieser Druck nach allen Richtungen durch die flüssige Masse gleichförmig fort, und jedes Theilchen derselben erfährt einen gleichen Druck.«

Zur Erläuterung dieses Satzes diene Nachstehendes.

Damit vorerst der gemachten Voraussetzung entsprochen werde, daß nämlich der flüssige Körper während des auf ihn einwirkenden Drucks im Gleichgewicht verbleibt, denken wir uns die Flüssigkeit in einem (beliebigen) Gefäße befindlich, welches sie ganz ausfüllt und wovon *ABCD* Fig. 1 den Horizontal-

Fig. 1.



Durchschnitt darstellen mag. Die röhrenförmige Mündung EF dieses Gefäßes sei durch einen verschiebbaren Kolben K gehörig dicht verschlossen, und die Flüssigkeit reiche genau bis unter die Fläche a des Kolbens. Ferner denken wir uns dabei die Flüssigkeit als gewichtslos, sehen also von der Wirkung der Schwerkraft, überdieß auch von allen sonst noch möglichen Kräften ab *) und nehmen nur an, daß von Außen gegen den Kolben K ein Normaldruck $= p$ ausgeübt wird.

Die in dem Grundsatze ausgesprochene Behauptung läßt sich nun auf den Druck anwenden, welchen jedes Stück der Gefäßwände, ferner jeder in der Flüssigkeit befindliche Körper, sowie jeder Theil der Flüssigkeit selbst erfährt.

Jedes Stück der Gefäßwand, wie G, H etc., wo solches auch liegen mag, dessen Größe dem Querschnitte des Kolbens K gleichkommt, erfährt nämlich nach Außen einen dem p gleichen Normaldruck, dem für's Gleichgewicht die Festigkeit des Gefäßes gehörigen Widerstand leisten muß; **) oder wenn eine Stelle der Wandfläche, wie z. B. JL, durch einen ebenfalls verschiebbaren Kolben M verschlossen wäre, so müßte, wenn ebenfalls Gleichgewicht stattfinden soll, gegen M ein von Außen nach Innen gerichteter Normaldruck angebracht werden, welcher dem auf den Kolben K wirkenden Drucke p völlig gleich kommt. — Der gegen K ausgeübte Normaldruck wirkt nämlich hier nicht blos

*) Zu den sonstigen Kräften gehört namentlich die, vermöge welcher die Theilchen einer Flüssigkeit unter sich und von festen Körpern (Gefäßwänden) angezogen werden, und die man, je nach den Umständen, unter welchen sie wirkt, mit dem Namen Haarröhrchenkraft oder Adhäsionskraft bezeichnet. Man sehe hierüber die in jeder Beziehung höchst empfehlenswerthe Arbeit Hagen's: „Ueber die Oberfläche der Flüssigkeiten" in P. A. Bd. 67. S. 1.

**) Es kann hier lediglich von einem Normaldrucke (rechtwinkeligem Drucke) gegen die Wandstücke die Rede sein, da nur ein solcher durch den Widerstand der Gefäßwände völlig aufgehoben wird; ein blos theilweises Aufheben müßte Kräfte übrig lassen, die eine neue Wirkung auf die Flüssigkeit und somit Bewegung, nicht aber Gleichgewicht hervorbringen würden.

auf die in seiner geradlinigen Richtung liegenden Theile, wie solches bei festen Körpern der Fall sein würde, sondern er wird wegen der leichten Verschiebbarkeit der Flüssigkeitselemente auch unverändert denjenigen derselben mitgetheilt, welche seitwärts des Kolbens *K* liegen. — Wieviel aber auch dem Kolben *K* an Querschnitt gleiche verschiebbare Kolben *M* vorhanden sein mögen, jeder derselben müßte für den Zustand des Gleichgewichts durch einen Gegendruck gehalten werden, welcher dem gegen *K* ausgeübten Drucke gleich ist. Demnach ist aber jeder von diesen Drücken so anzusehen, als hielte er allen übrigen das Gleichgewicht; auch erkennt man, daß der Abstand zwischen den einzelnen beweglichen Wandstücken oder Kolben nicht in Betracht gezogen zu werden braucht, vielmehr gleich Null gesetzt werden kann, weßhalb überhaupt folgt, daß der gegen einen Kolben *K* vom Querschnitte $= a$ ausgeübte Druck $= p$ dem auf einen Kolben $= na$ wirkenden Drucke $= np$ das Gleichgewicht hält. Setzt man $na = A$, $np = P$, so ergiebt sich die Proportion:

$$p : P = a : A \text{ und hieraus}$$

$$\text{I.} \quad P = \frac{A}{a} p.$$

Den Normaldruck P kann man den fortgepflanzten Druck nennen, im Gegensatze des unmittelbaren p.

Dasselbe Verhalten wie die Gefäßwände zeigt auch jeder in der Flüssigkeit befindliche Körper, wie *NOPQ*, wobei für's Gleichgewicht nur wieder vorauszusetzen sein wird, daß derselbe gehörige Festigkeit besitzt, um nicht von dem auf ihn fortgepflanzten Drucke in einen kleineren Raum zusammengedrängt zu werden. Endlich gilt dasselbe auch für jedes Theilchen der Flüssigkeit selbst, indem man blos die Ausdehnung *NO* und *PQ* des vorgedachten Körpers gleich Null zu setzen braucht, um eine Ebene entstehen zu lassen, die man auch als Berührungsfläche von Flüssigkeitstheilchen selbst ansehen, und auf welche man das Vorhergehende unmittelbar anwenden kann.

Anmerkung. Bei Flüssigkeiten, die mehr Cohäsion besitzen als Wasser, und andere, die im Vorstehenden vorausgesetzt wurden, besonders aber bei denen, welche man gewöhnlich mit dem Namen „halbflüssige Körper“ bezeichnet, findet der Satz der gleichförmigen Druckfortpflanzung mehr oder weniger unvollständig statt, wie wir später beim Boden- oder Seitendruck auf Wände besonders kennen lernen werden.

Höchst merkwürdig ist die bei den Vorarbeiten zum Baue der Menai-Röhrenbrücke in England gemachte Beobachtung, nach welcher Gußeisen, als auch andere Metalle, bei sehr hohen Drücken, ähnlich wie Flüssigkeiten, einen gleichen Druck nach jeder Richtung ausüben sollen, in welcher die Bewegung durch Widerstände verhindert wird. Man sehe deshalb; Clark, The Tubular Bridges. Vol. I. p. 311.

§. 5.

Nach Gleichung I kann man eine Kraft beliebig verstärken, d. h. mit einem sehr geringen Drucke einen außerordentlich großen erzeugen, wenn man die gegebene Kraft $= p$ gegen einen Kolben vom Querschnitte $= a$ wirken und den erzeugten Druck durch eine Flüssigkeit auf einen zweiten, entsprechend größeren Kolben vom Querschnitte $= A$ fortpflanzen läßt. Daß indeß hierdurch an mechanischer Wirkung Nichts gewonnen wird, werden wir nachher besonders zeigen.

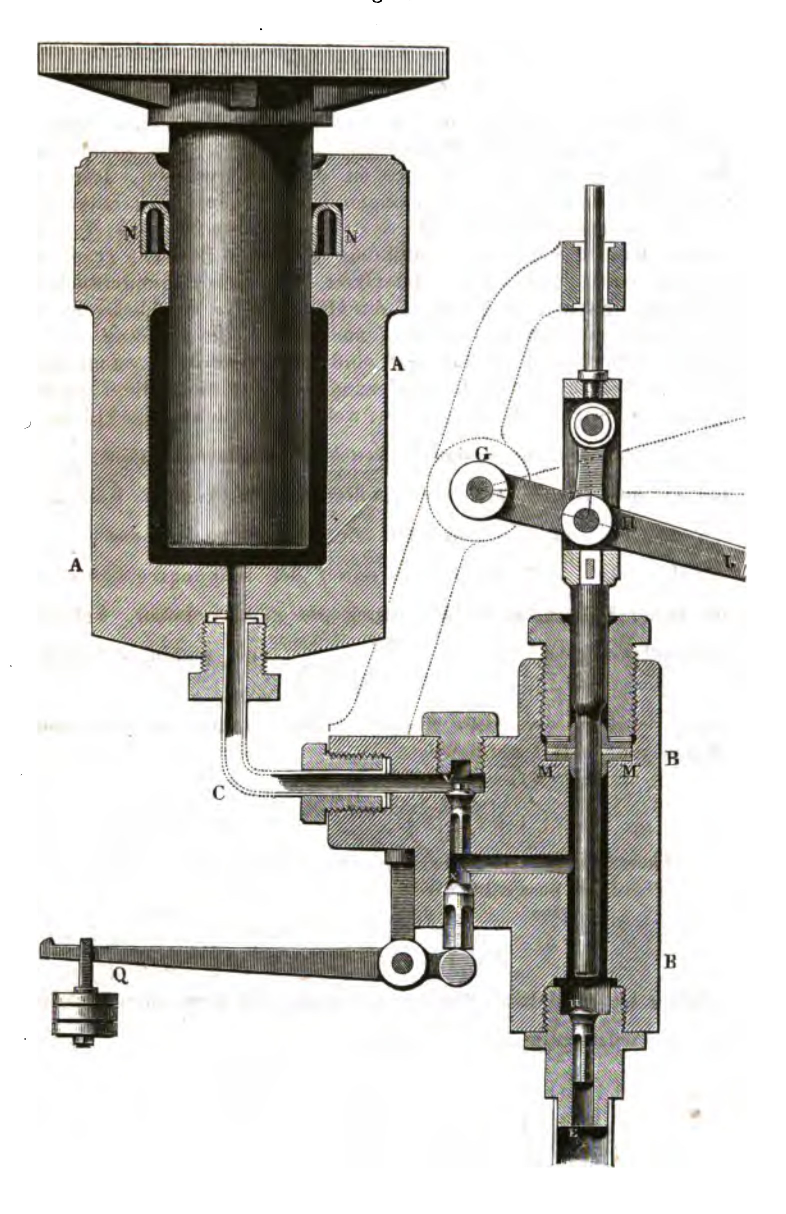
Auf diesem Satze beruht namentlich das Princip einer Maschine, die nach ihrem Erfinder Bramah'sche Presse, auch hydrostatische oder hydraulische Presse genannt wird. Das Wesentlichste einer solchen Maschine zeigt Fig. 2 im Verticaldurchschnitte.

Im Allgemeinen besteht dieselbe aus zwei cylindrischen, gewöhnlich mit Wasser oder Oel gefüllten Gefäßen A und B von ungleichen Durchmessern, deren innere Räume durch ein Rohr C so mit einander verbunden sind, daß sie Gefäße bilden, wobei die Flüssigkeit ungehindert aus einem in das andere treten kann, und welche man communicirende Gefäße oder Röhren nennt. In jedem der Cylinder befindet sich ein verschiebbarer (vermöge einer sogenannten Liederung) gehörig dichtender Kolben. Durch eine Oeffnung E gelangt das Wasser von unten in den kleinen Cylinder, und der Rücktritt wird durch ein in gedachter Oeffnung angebrachtes Ventil u verhindert. (Ueberhaupt gehört der kleine Kolben einer Druckpumpe an.) Durch das Niederdrücken des kleinen Kolbens wird das Wasser in den großen Cylinder getrieben und veranlaßt den darin befindlichen Kolben zum Aufsteigen. Damit ferner das einmal in den großen Cylinder gelangte Wasser nicht zurückfließen kann, ist bei v ein zweites Ventil (Sperrventil) angebracht. Gewöhnlich läßt man die gegen den kleinen Kolben wirkende Kraft an einem einarmigen Hebel GHI angreifen, dessen Drehpunct hier bei G liegt.

Um sowohl zu großen Drücken vorzubeugen, welchen die Stärkenverhältnisse der Presse nicht widerstehen, vielmehr ein Zerstören derselben veranlassen könnten, also auch um die Größe des Druckes zu messen, welcher vom kleinen Kolben auf den großen übertragen wird, ist ein Sicherheitsventil x angebracht etc.

Zur Berechnung des auf den großen oder Preßkolben fortgepflanzten Druckes $= P$, sei p die unmittelbar gegen den kleinen Kolben wirkende Druckkraft, ferner mögen D und d die respectiven Durchmesser der Kolben bezeichnen. Sodann erhält man nach I. §. 4, da hier $A = \frac{D^2\pi}{4}$, $a = \frac{d^2\pi}{4}$ ist, (1) $P = p\frac{D^2}{d^2}$.

Fig. 2.



Ist ferner die am Hebel bei J angreifende Kraft $= k$, ferner $GH = a$, $GJ = b$ gegeben, so folgt $p = k\frac{b}{a}$ und nach (1)

$$(2)\ P = k\frac{b}{a}\cdot\frac{D^2}{d^2}.$$

Hierbei ist jedoch von den stattfindenden Reibungen abgesehen. Läßt man den Widerstand unbeachtet, welcher durch das Anhängen etc. des Wassers an den Gefäßwänden, Durchgehen desselben durch Verengungen und Erweiterungen entsteht, so ist es namentlich die an den Liederungen M und N der beiden Kolben entstehende Reibung, welche in Betracht gezogen werden muß. Die Größe derselben läßt sich folgendermaßen ermitteln. Es mögen H und h die Höhen jeder der Liederungen bezeichnen, so daß die Flächen, an welchen die Reibung stattfindet, respective $D\pi H$ und $d\pi h$ sind; ferner werde angenommen, daß das Wasser selbst die Liederungen gegen die Kolben preßt. Sodann stelle x den Theil von p dar, welcher wirklich auf die Flüssigkeit übertragen wurde, so daß der Druck auf die Flächeneinheit: $\frac{4x}{d^2\pi}$, mithin der Druck auf die Liederung des kleinen Kolbens: $\frac{4x}{d^2\pi}\cdot d\pi h = 4x\cdot\frac{h}{d}$, und auf die des großen Kolbens: $\frac{4x}{d^2\pi}\cdot D\pi H = 4x\frac{D}{d^2}H$. Bezeichnet nun f den Reibungscoefficienten für beide Kolben, so ist der Druck per Flächeneinheit, welcher fortgepflanzt wird: (3) $\frac{4p}{d^2\pi\left(1+4f\frac{h}{d}\right)}$ und mithin die Reibung, welche der große Kolben erfährt, indem man letzteren Werth mit $f\pi DH$ multiplicirt:

$$(4)\ \frac{4fp\pi DH}{d^2\pi\left(1+4f\frac{h}{d}\right)} = 4fk\frac{b}{a}\frac{DH}{d^2\left(1+4f\frac{h}{d}\right)}.$$

Hiernach aber der resultirende Druck $= P$, welcher von der Preßplatte ausgeübt wird:

$$P = \frac{D^2\pi}{4}\cdot\frac{4p}{d^2\pi\left(1+4f\frac{h}{d}\right)} - 4fp\frac{DH}{d^2\left(1+4f\frac{h}{d}\right)},$$

folglich nach gehöriger Zusammenziehung und wenn man zugleich für p wiederum $p = k\frac{b}{a}$ substituirt:

$$\text{I.}\quad P = k\frac{b}{a}\frac{D^2}{d^2}\frac{1-4f\frac{H}{D}}{1+4f\frac{h}{d}}.$$

Hiernach wird der von einer hydraulischen Presse ausgeübte (Nutz–) Druck um so größer je niedriger die Liederungen der betreffenden Kolben sind. *) Den Reibungscoefficienten f wird man, bei der Unbestimmtheit der Morin'schen Angaben, allerhöchstens zu $\frac{1}{6}$ annehmen können.

Unter Annahme des letzteren Werthes wird:

$$P = 0{,}875.k\,\frac{b}{a}\,\frac{D^2}{d^2}\text{, wenn } \frac{h}{d} = \frac{H}{D} = 0{,}1 \text{ ist,}$$

$$P = 0{,}765.k\,\frac{b}{a}\,\frac{D^2}{d^2}\text{, wenn } \frac{h}{d} = \frac{H}{D} = 0{,}2,$$

woraus zugleich folgt, daß hier die Reibungsverluste immerhin geringer wie bei Schraubenpressen (Geostatik §. 95) sind.

Ist w die Weglänge, welche der Angriffspunkt der Kraft k im Sinne ihrer Richtung bei jedem Hube durchläuft, so wird die in derselben Zeit aus dem kleinen Cylinder weggedrückte Wassermenge betragen: $\frac{wa}{b} \cdot \frac{d^2\pi}{4}$. Bezeichnet man ferner den entsprechenden Weg des großen Kolbens (pr. Hub) mit W, so ist offenbar $\frac{wa}{b}\,\frac{d^2\pi}{4} = W\,\frac{D^2\pi}{4}$, also

$$\text{II.} \quad W = w\,\frac{a}{b} \cdot \frac{d^2}{D^2}.$$

Verbindet man diese Gleichung mit (2), so folgt endlich

$$\text{III.} \quad PW = kw,$$

woraus, wie überhaupt bei Maschinen (§. 31 Geodynamik. Zusatz 3), hervorgeht, daß ein Gewinn an mechanischer Arbeit durch die hydraulische Presse nicht zu bewirken ist.

Wichtig dürfte noch sein aufmerksam zu machen, daß der durch das Sicherheitsventil angegebene Druck nicht der Nutzdruck P, sondern ein größerer ist, welcher nach (3) pr. Flächeneinheit (5) $\frac{4kb}{a\pi d^2}\,\frac{1}{\left(1 + 4f\frac{h}{d}\right)}$ beträgt, ein Umstand, der bei mehreren mir bekannten Versuchen mit der hydraulischen Presse übersehen worden ist. Endlich werde noch erwähnt, daß man nicht gern höhere Drücke als 3 Tonnen engl. (à 2240 ℔) pr. Quadratzoll engl. eintreten läßt (Clark's Britannia–Röhren–Brücke. S. 621).

---

*) Hieraus erklärt sich der Vortheil der bekannten (Reichenbach-Henschel'schen) Liederung, welche aus einfachen Lederringen besteht, die in entsprechenden Nuthen des Kolbens Platz finden. Man sehe hierüber u. A. Kohl's Elemente von Maschinen. 2. Abtheilung. Fig. 12. Tafel V.

Beispiel. Wie groß ist der resultirende Druck auf der Preßplatte einer hydraulischen Presse und innerhalb welcher Zeit steigt der Preßkolben auf 1 Zoll Höhe, wenn $D = 12''$, $d = 1\frac{1}{2}''$, $\frac{b}{a} = \frac{10}{1}$; $\frac{h}{d} = \frac{1}{4}$; $\frac{H}{D} = \frac{1}{8}$, $f = \frac{1}{6}$ ist, ferner k = 2 . 30 ℔ = 60 ℔ (zwei Arbeiter), die Hubhöhe wie Geschwindigkeit der Arbeiter = $2\frac{1}{2}$ Fuß pr. Sec. beträgt.

Auflösung. Zuerst ist nach I: $P = 0{,}786 \,.\, 38400 = 30171{,}4$ ℔. Der Nutzeffekt folglich reichlich 76 %. Sodann ist $W = \frac{30}{10}\left(\frac{9}{4\,.\,144}\right) = \frac{1}{21{,}33}$ Zoll. Es ist aber ferner die Zeit eines Hubes $= \frac{2\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}} = 1$ Secunde, die Zeit eines Auf- und Abganges (Doppelhubes) also 2 Secunden und mithin die Zeit, um die Preßplatte auf 1 Zoll zu heben: $2 \,.\, 21{,}33 = 42{,}66$ Secunden. Der Druck auf die Flächeneinheit des Sicherheitsventiles x beträgt nach (5) : $\frac{4\,.\,60\,.\,10}{\pi\,.\,1\,.\,(\frac{3}{2})^2}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{3}\,.\,\frac{1}{4}}\right) = 291$ ℔. Ist endlich das Hebelverhältniß (woselbst das Gewicht Q aufgehangen) abermals $\frac{10}{1}$, so muß $Q = 29{,}1$ ℔ allermindestens genommen werden.

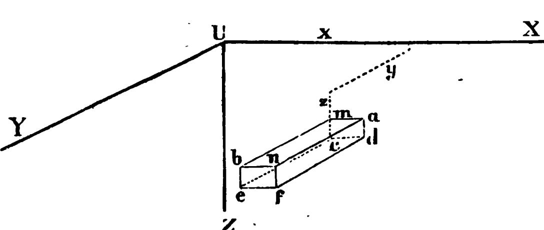
[§. 6.]

Mit Hülfe der Differenzialrechnung läßt sich (nach Euler) für das Gleichgewicht flüssiger Körper eine allgemeine Gleichung aufstellen, indem man sich mit der analytischen Auflösung folgender Aufgabe beschäftigt:

„Wenn irgend eine flüssige Masse der Einwirkung beliebiger accelerirender Kräfte unterworfen ist, die Bedingung anzugeben, unter welcher Gleichgewicht statt findet.“

Hierzu denken wir uns zunächst ein unendlich kleines Element der flüssigen Masse von parallelepipedischer Gestalt, Fig. 3, dessen Lage durch drei rechtwinkelige Coordinaten bestimmt ist, während die drei unendlich kleinen Kanten desselben sein mögen: $ma = dx$, $mb = dy$, $mc = dz$. Der körperliche Inhalt dieses Elementes wird sodann dargestellt durch $dx\,dy\,dz$, so wie seine

Fig. 3.



Masse *dm*, wenn γ die gleichförmige Dichtigkeit der Flüssigkeit und g die Erdacceleration bezeichnet, durch

$$(1) \quad dm = \frac{\gamma}{g}\, dx\, dy\, dz.$$

Wie nun auch immer die accelerirenden Kräfte beschaffen sein mögen, welche in m auf das Flüssigkeitselement wirken, in jedem Falle wird man sie sämmtlich nach drei auf einander rechtwinkeligen Richtungen parallel den drei Coordinatenaxen UX, UY, UZ zerlegen können. Bezeichnen daher X, Y und Z die den drei Axen parallelen Composantensummen der Accelerationen, welche den gegebenen Kräften entsprechen, so hat man

$$(2) \quad \begin{cases} dm\,X = \frac{\gamma}{g}\, dx\, dy\, dz\,.\,X\,; \\ dm\,Y = \frac{\gamma}{g}\, dx\, dy\, dz\,.\,Y\,; \\ dm\,Z = \frac{\gamma}{g}\, dx\, dy\, dz\,.\,Z. \end{cases}$$

Jede der vier Größen γ, X, Y und Z wird dabei als Funktion der drei Veriabeln x, y und z betrachtet.

Unter Voraussetzung fortdauernden Gleichgewichts muß aber die Wirkung dieser bewegenden Kräfte durch den Druck aufgehoben werden, welchen das Parallelepiped *mf* von allen Seiten erleidet. Dieser Druck im Punkte m werde nur durch die Größe p dargestellt, welche gleichfalls Funktion von x, y und z ist und deren totales Differenzial bekanntermaßen ist:

$$(3) \quad dp = \left(\frac{dp}{dx}\right) dx + \left(\frac{dp}{dy}\right) dy + \left(\frac{dp}{dz}\right) dz.$$

Dieser unbestimmte Ausdruck kann nun auf nachstehende Weise in einen bestimmten verwandelt werden. Der Druck auf die Fläche *nmab* läßt sich darstellen durch $p\,.\,dxdy$. In Bezug auf die gegenüberliegende Fläche *cdef* bemerke man, daß der Druck auf die Einheit dieser Fläche um so viel größer (oder kleiner) geworden sein muß, als sich p in Bezug auf z geändert hat, weil beim Uebergange von m nach c die Coordinaten x und y unverändert geblieben sind. Hiernach wird aber der Druck auf *cdef* darzustellen sein durch $dx\, dy \left[p + \left(\frac{dp}{dz}\right) dz\right]$, der resultirende Druck parallel der Axe UZ also durch:

$$dx\, dy\, dz \left(\frac{dp}{dz}\right).$$

Soll nun im Sinne der Axe Z keine Bewegung erfolgen, so erhält man mit Bezug auf (2) als Bedingungsgleichung:

$$dx\,dy\,dz \left(\frac{dp}{dz}\right) = \frac{\gamma}{g}\,dx\,dy\,dz\,.\,Z\,,\quad \text{d. i.}$$

$$(4)\quad \frac{dp}{dz} = \frac{\gamma}{g}\,.\,Z.$$

Wegen des Satzes von der gleichförmigen Druckfortpflanzung etc. wird man die Drücke auf die Einheiten der Flächen *mceb* und *mcda* ebenfalls $= p$ annehmen können und überhaupt wie vorher als Gleichgewichtsbedingung im Sinne der Axenrichtungen Y und X erhalten:

$$(5)\quad \left(\frac{dp}{dy}\right) = \frac{\gamma}{g} Y;\qquad (6)\quad \left(\frac{dp}{dx}\right) = \frac{\gamma}{g} X.$$

Jetzt (4) bis mit (6) in (3) substituirt giebt endlich die gesuchte Bedingungsgleichung zu:

$$\text{I}\quad dp = \frac{\gamma}{g}\,(X dx + Y dy + Z dz).$$

Die Existenz des Gleichgewichts einer Flüssigkeit hängt also von dem Bestehen dieser Gleichung ab, d. h. es findet Gleichgewicht statt, wenn der rechte Theil integrirbar ist, was immer der Fall sein wird, wenn derselbe ein vollständiges Differenzial einer Funktion dreier unabhängiger Veriabeln ist. *) In der Hydrostatik setzen wir γ immer als unabhängig vom Drucke p voraus, also für dieselbe Flüssigkeit constant.

Zusatz 1. An den Stellen, woselbst sich die Flüssigkeit an entsprechend feste Wände lehnt, wird der Druck p offenbar vernichtet. Ueberall da, wo die Flüssigkeit mit Wänden nicht in Berührung ist, an der freien Oberfläche, muß jedoch p für den Gleichgewichtszustand an sich gleich Null sein, weil sonst nichts vorhanden ist, was diesen Druck aufzuheben vermöchte. Dasselbe gilt endlich auch, wenn p einen für die ganze Ausdehnung der Oberfläche constanten Druck repräsentirt. Die Gleichung

$$\text{II.}\quad 0 = X dx + Y dy + Z dz$$

ist sonach das Differenzial der Coordinatengleichung der freien Oberfläche der ganzen Flüssigkeit.

Die Gleichung II entspricht überhaupt allen Flächen von gleichem Drucke, folglich auch noch allen Schichten im Innern der Flüssigkeit, in welchen der Druck überall derselbe ist und welche man auch Niveauschichten nennt. Die betreffenden Flächen unterscheiden sich dabei nur durch die Integralconstante von II, weil zwar der Druck für alle Punkte derselben constant, aber von Schicht zu Schicht veränderlich ist.

---

*) Die analytische Bedingung der Integrirbarkeit ist bekanntlich: $\frac{d\gamma X}{dy} = \frac{d\gamma Y}{dx}$; $\frac{d\gamma X}{dz} = \frac{d\gamma Z}{dx}$; $\frac{d\gamma Y}{dz} = \frac{d\gamma Z}{dy}$. Oder wenn γ constant ist: $\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}$, $\frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}$, $\frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}$.

Zusatz 2. Aus der Gleichung II läßt sich auch noch der wichtige Satz ableiten, daß die Richtung der Resultirenden der auf eine Flüssigkeit mit freier Oberfläche wirkenden Kräfte auf der Berührungslinie der krummen Linie, die man willkürlich auf der Oberfläche gezogen hat, rechtwinklig steht. (Geostatik, Zusatz §. 30.)

Zusatz 3. Um zugleich eine auch technisch nützliche Anwendung der Gleichung II nachzuweisen, wollen wir die Gestalt der freien Oberfläche des Wassers untersuchen, welches in einem cylindrischen Gefäße mit kreisförmiger Basis vom Halbmesser $= r$, Fig. 4, befindlich ist u. mit einer constanten Winkelgeschwindigkeit ω um eine senkrechte Axe in Umdrehung versetzt wird. Die dabei auf die Flüssigkeit wirkenden Kräfte mögen allein Flieh- und Schwer-Kraft sein.

Fig. 4.

Nehmen wir die Axe Z als mit der Schwerkraftsrichtung zusammenfallend und zugleich als Drehaxe an und ist ϱ die Entfernung für ein beliebiges Element dm der Flüssigkeit von dieser Axe, so ist die Fliehkraft desselben $= dm\varrho\omega^2$ und die Composanten parallel den Axen Y und X sind respective $dmy\omega^2$ und $dmx\omega^2$.

Ueberhaupt ist daher in II zu setzen: $X = x\omega^2$, $Y = y\omega^2$ und $Z = -g$, wo g die Erdaccelleration bezeichnet, so daß man erhält:

$$0 = \omega^2 (xdx + ydy) - gdz, \text{ und}$$

hieraus durch Integration;

$$Z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) + C = \frac{\omega^2}{2g}\varrho^2 + C,$$

welches die Coordinatengleichung der Oberfläche eines Rotationsparaboloids ist. Für den Scheitel A ist $\varrho = 0$ und $Z = AU = H$, folglich $H = C$ und $z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) + H$. Für die Punkte der größten Erhebung wird $\varrho = r$ und $z = UB = H + h$, also $H + h = \frac{r^2\omega^2}{2g} + H$, und die Tiefe AB des paraboloidischen Trichters $h = \frac{r^2\omega^2}{2g}$ etc. Von letzterem Werthe macht man bei der Theorie gewisser horizontaler Wasserräder nützlichen Gebrauch.*)

*) Für ein gründlicheres und ausführlicheres Studium dieses ganzen

Zweites Kapitel.

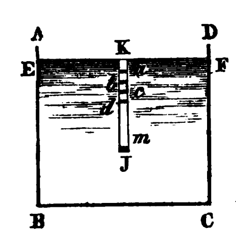
Gleichgewicht und Druck des Wassers in Gefässen, wenn auf solches blos die Schwerkraft als wirksam gedacht wird.

§. 7.

Wirkt allein die Schwerkraft auf das in einem offenen Gefäße *ABCD*, Fig. 5, enthaltene Wasser, so entsteht ein vertikal abwärts gerichteter Druck, welcher sich zwar nach allen Seiten hin fortpflanzt, dessen Größe sich jedoch nach besonderen Gesetzen richtet, deren Aufsuchung im Nachstehenden geschehen soll.

Um zunächst ein Maß für einen solchen Druck zu erhalten, betrachten wir ein in der flüssigen Masse befindliches Theilchen oder Element *m* und denken uns über demselben eine bis zur Oberfläche oder dem Wasserspiegel *EF* reichende Flüssigkeitssäule (Wasserfaden) *KI* gleichsam als abgegrenzt. Das an der Oberfläche befindliche Element *a* wird nun durch sein Gewicht auf das zunächst unter ihm liegende Element *b*, so wie mittelbar auf alle folgende drücken; für den Druck auf das unter *b* liegende Element *c* vereinigt sich mit dem fortgepflanzten Drucke von *a* das Gewicht des Elementes *b*, u. s. f. für alle abwärts nach *m* hin liegende Elemente, so daß der Druck, welchen *m* erfährt, durch das Gewicht der Flüssigkeitssäule *KI* gemessen wird.

Fig. 5.



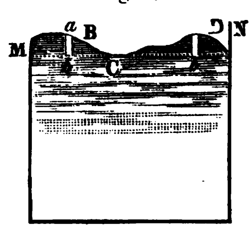
Der Druck, welchen irgend ein Flüssigkeitselement erfährt, ist sonach um so größer, je tiefer dasselbe unter dem Wasserspiegel *EF* liegt, und in einer von letzterem überall gleichweit abstehenden Fläche der flüssigen Masse müssen gleiche Drücke stattfinden.

Hiernach läßt sich nun zeigen, daß für den Zustand des Gleichgewichtes der Wasserspiegel *EF* eine horizontale Ebene bilden muß. Angenommen, es wäre letzteres nicht der Fall, vielmehr habe die Oberfläche eine aus der Durchschnittsfigur 6 sich ergebende Gestalt, wobei einzelne Theile der Flüssigkeit

---

Gegenstandes verdient insbesondere empfohlen zu werden: Duhamel, Cours de mécanique de l'école polytechnique, Deuxième Partie, §. 133 und §. 134. Paris 1846.

Fig. 6.

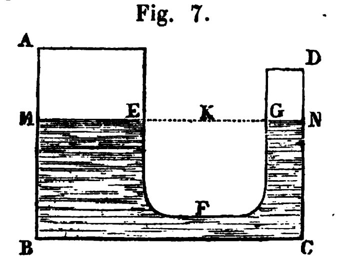


höher als andere liegen. Durch den tiefsten Punct *C* denke man sich eine horizontale Ebene *MN* geführt, und die darüber bei *B* und *D* befindlichen Flüssigkeitsmassen in Wassersäulen *ab* u. s. w. zerlegt. Jede solcher Wassersäulen übt nun einen nach allen Seiten hin gerichteten Druck aus, der nothwendig eine Bewegung veranlassen muß, wenn die übrigen Flüssigkeitselemente nicht einen gleichen Gegendruck leisten. So lange aber über *MN* nicht Flüssigkeitssäulen von gleicher Höhe stehen, oder die Oberfläche nicht zu *MN* parallel, d. i. horizontal ist, kann jener gleiche Gegendruck nicht stattfinden, folglich auch kein Gleichgewicht vorhanden sein.

Hieraus folgt zugleich, daß, für den Zustand des Gleichgewichtes, die in einer und derselben beliebigen Horizontalschicht der Flüssigkeit stattfindenden Drücke sich gegen einander aufheben müssen.

Alle diese Gesetze sind von der Gefäßform ganz unabhängig und gelten daher auch für sogenannte communicirende Gefäße *ABCD*, Fig. 7, woselbst man den Satz vom horizontalen Wasserspiegel gewöhnlich so auszudrücken pflegt, daß man sagt: »in communicirenden Gefäßen ist eine und dieselbe Flüssigkeit nur dann im Gleichgewichte, wenn die Oberflächenspiegel in einerlei Horizontalebene liegen.«

Fig. 7.



Letzteren Satz beweist man wohl auch so, daß man sich die Wände *EFG* der Gefäße hinweg und das Gefäß selbst so weit mit Wasser gefüllt vorstellt, daß *MN* den Wasserspiegel bildet, der nach dem Vorstehenden horizontal sein muß; hierauf den Theil *EFGK* der Flüssigkeit wieder fest werden und in der gezeichneten Lage der Figur erhalten läßt, wonach kein Grund vorhanden ist, anzunehmen, es lägen die beiden nunmehro getrennten Spiegel *MB* und *GN* nicht mehr in derselben horizontalen Ebene.

Anmerkung. Einigermaßen abgeändert wird letzterer Satz allein in dem Falle, wenn die betreffenden communicirenden Gefäße sehr enge Röhren (Haarröhren) bilden, was vom technischen Standpuncte betrachtet oft zu berücksichtigen ist, wenn die Durchmesser der Röhren entsprechend klein sind.

Eben so ist noch zu bemerken, daß die Oberfläche von Wassermassen bedeutender Ausdehnung Theile einer Kugelfläche bilden

müssen, wenn allein die Schwerkraft auf das Wasser als wirksam gedacht wird. Mit Hülfe der Gleichung II §. 6 läßt sich letzterer Satz mathematisch nachweisen.

§. 8.

Bodendruck.

Aus dem Vorhergehenden folgt unmittelbar, daß Wasser, welches sich in einem prismatischen Gefäße mit verticaler Axe und horizontalem Boden befindet, gegen letzteren im Zustande des Gleichgewichtes einen Druck ausübt, welcher dem Gewichte des Wassers gleich ist. Denn wenn auch, der gleichförmigen Druckfortpflanzung wegen, gleichzeitig ein Druck auf die Seitenwände des Gefäßes ausgeübt werden muß, so ist dieser doch gleichsam als eine Art von Spannung anzusehen, wodurch keine Verminderung des Druckes in verticaler Richtung veranlaßt wird. Der Druck auf den horizontalen Boden eines geraden prismatischen Gefäßes ist folglich dem Gewichte einer Wassersäule gleich, welche diesen Boden zur Grundfläche und dessen Verticalabstand vom Wasserspiegel zur Höhe hat. Bezeichnet daher A den Flächeninhalt des Bodens, H die Wasserhöhe und γ das Gewicht der Cubikeinheit Wasser, so erhält man für den Bodendruck $= P$

$$P = \gamma \, . \, A \, . \, H.$$

Hierbei ist natürlich vorausgesetzt, daß sich H und A auf dasselbe Längen- und Flächenmaß beziehen, wie das Cubikmaß für γ. Drückt man daher erstere beiden Größen respective in Metern und Quadratmetern aus, so bezeichnet γ das Gewicht eines Cubikmeters Wasser, welches gleich 1000 Kilogrammen anzunehmen ist.*) Daher wird

$$P = 1000 \, . \, A \, . \, H. \text{ Kilogramme.}$$

Der so eben gefundene Satz für den Bodendruck gilt aber auch für jedes beliebige, wie immer gestaltete Gefäß *ABCD*, Fig. 8 oder Fig. 9, was sich auf folgende Weise darthun läßt.

---

*) Der Temperatureinfluß auf das Gewicht der Cubikeinheit Wasser kann bei gegenwärtigen Betrachtungen außer Acht bleiben. So rechnet man das Gewicht eines

englischen	Cubikfußes	Wasser	=	62,50 ℔	engl.
preußischen	„	„	=	66,00 ℔	kölnisch
hannoverschen	„	„	=	53,20 ℔	—
sächsischen	„	„	=	48,55 ℔	Dresd.
österreichischen	„	„	=	56,38 ℔	Wiener
französischen	„	„	=	70,00 ℔	Pariser.

Fig. 8.

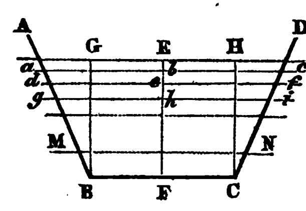
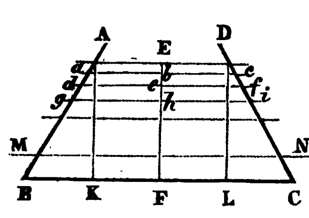


Fig. 9.



Es sei $EF = H$ die senkrechte Wasserhöhe, der Inhalt des Horizontalbodens $BC = A$. Man denke sich nun EF in sehr kleine Theile Eb, de, eh etc. getheilt, und durch jeden der Theilpuncte eine horizontale Ebene, wie ac, df, gi etc. gelegt, so daß man die dadurch gebildeten Körperelemente ohne besonderen Fehler als Prismen ansehen darf. Die Inhalte der respectiven Grundflächen mögen mit a_1, a_2, a_3 . . . . bezeichnet werden.

Nach dem Vorstehenden wird sodann der Druck $= p_1$, welchen die Fläche a_1 erfährt, ausgedrückt durch

$$(1) \quad p_1 = \gamma \cdot a_1 \, Eb.$$

Der Druck $= p_2$, welchen die Fläche a_2 erleidet, besteht aber aus dem Gewichte der unmittelbar über ihr stehenden Flüssigkeitssäule $acdf$ und aus dem fortgepflanzten Drucke von p_1, so daß, wenn letzterer vorerst mit x bezeichnet wird, folgt

$$(2) \quad p_2 = \gamma \cdot a_2 \, be + x.$$

Nach I. §. 4 verhält sich aber $p_1 : x = a_1 : a_2$, woraus sich $x = p_1 \frac{a_2}{a_1}$ und somit ergiebt

$p_2 = \gamma \cdot a_2 \cdot be + p_1 \frac{a^2}{a_1}$; oder, wenn man für p_1 den Werth aus (1) substituirt,

$$p_2 = \gamma \cdot a_2 \cdot be + \gamma \cdot a_2 \cdot Eb = \gamma \cdot a_2 \, (be + Eb); \text{ d. i.}$$

$$(3) \quad p_2 = \gamma \cdot a_2 \cdot Ee.$$

Ebenso erhält man für den Druck $= p_3$ auf die Fläche a_3, wenn der von p_2 fortgepflanzte Druck mit y bezeichnet wird,

$$(4) \quad p_3 = \gamma \cdot a_3 \cdot eh + y.$$

Es ist aber $y = p_2 \frac{a_3}{a_2}$, oder mit Bezug auf (3) $y = \gamma . a_3 . Ee$, somit aus (4)

$$p_3 = \gamma \, a_3 \, (eh + Ee) = \gamma \, a_3 \, Eh.$$

Auf solche Weise fortgefahren, läßt sich allgemein zeigen, daß der Druck, welchen eine beliebige Horizontalebene *MN* erfährt, ganz unabhängig von der Gefäßform, dem Gewichte einer Wassersäule gleich ist, welche die gedrückte Fläche zur Basis und den Verticalabstand derselben vom Wasserspiegel zur Höhe hat, so daß man für den Druck $= p_n = P$ auf den Boden wie vorher erhält

$$P = \gamma \cdot A.H.$$

Fig. 10.

Ebenso kann man darthun, daß vorstehendes Gesetz auch auf jeden horizontalen Theil der Seitenwände eines Gefäßes anwendbar ist. So ist z. B. der vertical aufwärts gerichtete Druck, welchen die Decke *BC* des bis zum Puncte *E* mit Wasser gefüllten Gefäßes *ABCED* Fig. 10, erfährt, dem Gewichte einer Wassersäule gleich, welche die Fläche *BC* zur Basis und den Verticalabstand *EF* zur Höhe hat.

Auf dem Satze vom Drucke gegen horizontale Boden, oder eben solche Wandstücken und Decken, beruht das Princip des anatomischen Hebers, der Real'schen Presse, der Wassersäulenmaschine, Kolbenpumpen etc.

Anmerkung 1. Nach diesen allgemeinen Sätzen könnte es auffallend erscheinen, daß der Bodendruck bald kleiner wie in Fig. 8, bald größer wie in Fig. 9 als das Gewicht der im Gefäße überhaupt enthaltenen Flüssigkeit ist; eine einfache Betrachtung giebt indeß hierüber Aufschluß. Bei Fig. 8 wird nämlich das in den Räumen *ABG* und *HCD* enthaltene Wasser von den Seitenwänden getragen und hat auf den Bodendruck keinen Einfluß. Bei Fig. 9 dagegen erklärt sich der scheinbare Widerspruch (das hydrostatische Paradoxon), daß der Boden einen größeren Druck auszuhalten hat als das Gewicht des darüber stehenden Wassers, sofort dadurch, daß man sich durch die schiefen Wände *AB* und *DC* bis zum Boden reichende Röhrchen gesteckt denkt, worauf das Wasser nach dem Satze von den communicirenden Röhren in diesen sich eben so hoch stellen wird als im Gefäße *ABCD*. Der Druck der Flüssigkeitssäulen von der Gefäßwandstelle bis zum Spiegel des Wassers im eingesteckten Rohre, ist bei geschlossener Wand als Reaction von oben nach unten thätig, vergrößert den Bodendruck entsprechend etc. Die letzten möglichen Zweifel fallen später bei der Betrachtung der Drücke auf Seitenwände weg.

Anmerkung 2. In wie weit die sogenannten halbflüssigen Körper vorstehendem Satze vom Bodendrucke völlig flüssiger Körper entsprechen, ist der Natur der Sache nach bis jetzt für manche dieser Körper noch unentschieden. Der wichtigen Anwendung im Baufache wegen hat man desfallsige Untersuchungen hauptsächlich auf Sand

ausgedehnt, wovon wir hier mittheilen, was Hagen *) angiebt, während wir insbesondere noch auf Navier's **) Bemerkungen aufmerksam machen.

Hagen's Hauptsätze sind Folgende: „Der Druck auf dem Boden einer vertical gestellten cylindrischen Röhre ist bei geringen Höhen dem Gewichte der ganzen darüber stehenden Sandmasse gleich. Bei zunehmender Höhe der Sandmasse wächst dieser Druck jedoch in einem geringeren Maße, wie das bemerkte Gewicht, und zwar wird die relative Vergrößerung desselben immer geringer, bis sie zuletzt ganz aufhört. Sobald man diese Grenze erreicht hat, wird gar keine Zunahme des Druckes noch ferner statt finden, wie hoch man auch die Aufschüttung fortsetzen und welche andere Belastung man auf dem Sande auch noch anbringen mag."

[§. 9.]

Mit Hülfe von Gleichung I. §. 6 lassen sich die Ergebnisse der vorigen §§. fast unmittelbar herleiten. Unter den vorher gemachten Voraussetzungen ist nämlich, wenn die Axe der Z als mit der Schwerkraftrichtung zusammenfallend vorausgesetzt wird, ohne Weiteres $X = Y =$ Null, $Z = -g$ und $dp = -\gamma dz$, folglich $p = -\gamma z + C$. Zur Bestimmung der Constanten C werde angenommen, daß Q die Pressung auf die Einheit der Oberfläche der Flüssigkeit bezeichne, wofür $z = h$ ist und weshalb folgt:

$$p = Q + \gamma(h - z).$$

Es stellt aber $h - z$ den Abstand derjenigen Gleichgewichtsschicht vom Oberwasserspiegel dar, welche überall pr. Flächeneinheit den constanten Druck p erfährt, während Q dem äußeren Drucke auf die flüssige Oberfläche entspricht und welcher bei technischen Fragen meistens der Druck der atmosphärischen Luft ist. Ueberhaupt lehrt der für p gefundene Ausdruck, daß die Pressung in jedem Puncte einer beliebigen Gleichgewichtsschicht von der Tiefe dieses Punctes unter dem Oberwasserspiegel, keineswegs aber von der Gefäßform abhängt.

§. 10.

Zur nochmehrigen Hervorhebung der Wichtigkeit vorstehender Sätze für technische Fragen mag hier folgende Aufgabe Platz finden. ***)

*) Hagen, Handbuch der Wasserbaukunst. Erster Theil, 2. Auflage, S. 507.

**) Navier, Mechanik der Baukunst, deutsch von Westphal §. 268 u. f., bespricht recht ausführlich die Versuche von Delanges, Huber-Burnaud und Moreau.

***) Mary, De l'emploi du Béton. Annales des Ponts et Chaussées, 1832, 2. Serie, pag. 66 u. 97 etc. Nach diesem: Hagen, Handbuch der Wasserbaukunst. Theil I. S. 802.

Man soll die Dicke $= e$ des Bétonbettes *) einer Baugrube, Fig. 11, unter nachfolgenden Voraussetzungen und Umständen berechnen.

Fig. 11.



An beiden langen Seiten der Baugrube sind Fangdämme aus Béton aufgeführt, welche das Aufschwimmen des ganzen Bodens durch ihr Gewicht verhindern, jedoch einem Bruche in der Mitte des Bettes nicht entgegenwirken.

Auflösung. Es sei h die Druckhöhe des Außenwassers WW über der Oberfläche RS des Bétonbettes, b die Breite des Bétonbettes zwischen den Fangdämmen, m die absolute Festigkeit des Bétons in Kilogrammen pr. Quadratmeter, γ das Gewicht eines Cubikmeters Wasser und $q = 1{,}5 \,.\, \gamma$ das Gewicht eines Cubikmeters Béton.

Der Wasserdruck $= P$ auf eine halbe Bodenfläche MN des Bétonbettes von 1^m Breite ist: $P = \gamma \frac{1}{2} b (h + e)$ und das Moment desselben, in Bezug auf N, wo $MO = \frac{1}{2} NM = \frac{1}{4} b$ ist, $\frac{\gamma}{2} b (h + e) \frac{b}{4} = \frac{\gamma}{8} b^2 (h + e)$.

---

*) Béton ist ein Gemenge von hydraulischem Mörtel mit Steinen (von höchstens 2 Zoll Durchmesser) ungefähr in dem Verhältnisse von 1 : 1 in Maßtheilen. Man sehe Hagen a. a. O. S. 788.

Das Gewicht des halben Bétonbettes: $\frac{qbe}{2}$, so wie dessen Momente, in Bezug auf N:

$$\frac{qb^2e}{8}.$$

Endlich ist das Moment der Bruchfestigkeit, wenn man die horizontale Gleichgewichtsaxe durch den höchsten Punkt des Querschnittes bei N legt: $\frac{m}{3} . 1 . e^2$.

Daher folgt als Gleichgewichtsbedingung:

$$\frac{m}{3} e^2 = \frac{\gamma b^2}{8} (h + e) - \frac{qb^2}{8} . e, \text{ und hieraus}$$

$$e = \frac{-3b^2(q-\gamma) + b\sqrt{9b^2(q-\gamma)^2 + 96.\gamma hm}}{16m}.$$

Nach Hagen ist $m = 68256$ Kil. pr. Quadratmeter (100 ℔ pr. Quadratzoll preuß.) zu nehmen.

Beispiel. Wie groß muß die Dicke des Bétonbettes sein, wenn $b = 9^m,1$ (29′ preuß.) $h = 4^m,7$ (15′), $\gamma = 1000$ Kil., $q = 1500$ Kil. ist?

$$e = 1^m,4.$$

§. 11.

Bei Flüssigkeiten, deren Theile verschiedene Dichten haben und sich nicht mischen, lagern sich diese für den Gleichgewichtszustand im Verhältniß ihrer Dichten über einander, weil eben das Gleichgewicht erfordert, daß die Dichtigkeit gleichzeitig mit dem Drucke in der ganzen Ausdehnung einer Horizontalschicht constant sei. Der Druck gegen Bodenflächen ist in solchem Falle gleich dem Flächeninhalte des Bodens, multiplicirt mit der Summe der Produkte aus den verschiedenen Flüssigkeitshöhen und ihren zugehörigen Dichten. Sind daher die Höhen der einzelnen Schichten $h_1, h_2, h_3 \ldots h_n$, ihre Dichten respective $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \ldots \gamma_n$, und der Flächeninhalt des Gefäßbodens $= A$, so erhält man für den gedachten Druck $= P$:

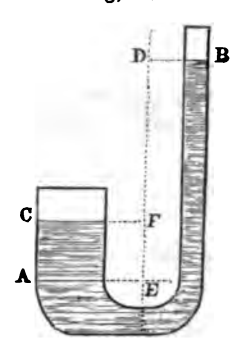
$$P = A(\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3 \ldots \gamma_n h_n.)$$

§. 12.

Befinden sich zwei Flüssigkeiten, welche sich nicht vermischen, in communicirenden Gefäßen, so verhalten sich die Höhen ihrer Oberflächen über der

Horizontalebene, in welcher sie sich berühren, wie umgekehrt ihre Dichten.

Fig, 12.



In den communicirenden Gefäßen, Fig. 12, sei der Theil AB von der Flüssigkeit mit geringerer Dichte $= p$ und der Theil AC von der mit größerer Dichte $= q$ eingenommen. Die Horizontalebenen der beiden Oberflächen in B und C mögen eine Verticallinie in D und F und die Horizontale A, wo sich die Flüssigkeiten berühren, eben diese Verticale in E schneiden.

Sodann erhält man sofort für den Druck der Flüssigkeit AB in A:

$$p \, . \, \overline{DE},$$

und für den Druck der Flüssigkeit AC in A:

$$q \, . \, \overline{FE}.$$

Für den Gleichgewichtszuztand müssen diese beiden Drücke gleich groß, d. i. $p \, . \, \overline{DE} = q \, . \, \overline{FE}$ sein, oder es findet, wie behauptet wurde, die Proportion statt:

$$\overline{DE} : \overline{FE} = q : p.$$

§. 13.

Druck auf die Seitenwände der Gefäße.

Vorerst werde bemerkt, daß es in der Hydrostatik gebräuchlich ist, jeden nicht horizontalen Boden oder jedes solches Stück desselben als Theil der Seitenwand des betreffenden Gefäßes zu betrachten.

In jedem mit Wasser gefüllten, beliebig gestalteten Gefäße erleidet aber ein nach allen Richtungen hin unendlich kleines Stück (Elementarfläche) einer solchen Seitenwand einen Normaldruck, welcher dem Gewichte einer Wassersäule gleich ist, die das gedachte Wandstück zur Basis und dessen Verticalabstand vom Wasserspiegel zur Höhe hat. Denn da der Druck, den irgend ein Wassertheilchen im Gefäße erfährt, sich eben so gut nach den Seiten, als nach unten fortpflanzt, so ist klar, daß ein Stück der Seitenwand, wie das vorbezeichnete, denselben Druck wie ein eben so großes Stück des Bodens erleiden würde, wenn man für beide einerlei Abstand vom Wasserspiegel voraussetzte.

Bildet das gedachte Wandstück eine krumme Fläche, so ist die Richtung dieses Druckes als rechtwinkelig auf der Tangentialebene desselben anzunehmen.

§. 14.

Für den Normaldruck, den eine ebene, senkrechte oder beliebig geneigte Seitenwand von willkürlicher Ausdehnung erfährt, läßt sich jetzt sehr leicht eine allgemeine Regel finden.

Man theile die ganze Wand in Elementarflächen, setze deren Inhalte a_1, a_2, a_3, ... a_n und ihre respectiven Abstände vom Wasserspiegel h_1, h_2, h_3, ... h_n. Die Drücke auf diese Elemente sind daher nach vorigem §: $\gamma a_1 h_1$, $\gamma a_2 h_2$, $\gamma a_3 h_3$, ... $\gamma a_n h_n$. Die Richtung jedes dieser Drücke steht aber auf der betreffenden ebenen Wand normal, so daß der Gesammtdruck gegen dieselbe aus einem Systeme paralleler Kräfte besteht, deren Mittelkraft $= R$ ihrer algebraischen Summe gleich ist, also

$$R = \gamma\,(a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 \ldots).$$

Es läßt sich aber die Summe der in der Parenthese befindlichen Größen näher bestimmen. Legt man nämlich den Elementarflächen a_1, a_2, a_3 .... Gewichte bei, wovon gleiche Theile gleichviel wiegen, so wirken diese in unter einander parallelen, gegen den Wasserspiegel rechtwinkeligen Richtungen, und es kann die gedachte Summe keine andere als die der statischen Momente der Theile a_1, a_2, a_3 .... sein, wenn man den Wasserspiegel zur Momentenebene annimmt. Bezeichnet man daher die Entfernung des Schwerpunctes der ebenen Wand vom Wasserspiegel mit z und den Inhalt der ganzen gedrückten Fläche mit A, d. h. setzt $A = a_1 + a_2 + a_3 \ldots$, so folgt

$$\gamma A z = \gamma\,(a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 \ldots);$$

mithin aus (1)

$$R = \gamma A z.$$

Der Normaldruck gegen eine beliebige ebene Seitenwand eines Gefäßes ist daher dem Gewichte einer Wassersäule gleich, welche die gedrückte Ebene zur Basis und den Abstand des Schwerpunctes derselben vom Wasserspiegel zur Höhe hat.

Die Schwerpunctsentfernung einer solchen Ebene vom Wasserspiegel nennt man gewöhnlich die Druckhöhe dieser Ebene.

Aus dem Vorstehenden läßt sich zugleich abnehmen, daß der Normaldruck auf eine in die Flüssigkeit untergetauchte Ebene derselbe bleibt, wenn man auch letztere beliebig um ihren Schwerpunct dreht.

Zusatz 1. Bei technischen Arbeiten und dahin gehörigen mathematischen Entwickelungen ersetzt man sehr oft Gewichte,

welche die Intensitäten von Kräften ausdrücken, durch Flüssigkeitssäulen von gleicher Größe des Gewichtes. Ist z. B. in einem besondern Falle die Größe der gegen die Einheit einer Fläche drückende Kraft $= p$, so erhält man, wenn x die Druckhöhe der Wassersäule bezeichnet, deren Gewicht das Maß für jenes p ist,

$$p = \gamma \cdot 1 \cdot x, \text{ oder } x = \frac{p}{\gamma}.$$

So wird ein Druck (einer Atmosphäre) von 14,7 ℔ engl., pr. □ Zoll engl. durch eine Wassersäule von $x = \frac{144 \cdot 14{,}7}{62{,}5}$ $= 33{,}8$ Fuß engl., ebenso der von 13,08 ℔ hannov. auf 1 hannov. □ Zoll durch eine Wassersäule von der Höhe $x = \frac{144 \cdot 13{,}08}{53{,}22}$ $= 35{,}4$ Fuß hannov. gemessen.

Zusatz 2. Der Normaldruck $= R$ gegen ein vertical gestelltes Rechteck von der Breite b und der Höhe h, dessen obere Seite mit dem horizontalen Wasserspiegel zusammenfällt, ist sonach: $R = \gamma b h \cdot \frac{h}{2} = \frac{\gamma b h^2}{2}$, d. h. bei gleichbleibender Breite ist der Normaldruck dem Quadrate der Höhe proportional.

Zusatz 3. Was die bereits §. 8 angeführten halbflüssigen Körper in gegenwärtigem Falle anlangt, so, dürfte auch hier nur das wichtig sein, was man bis jetzt beim Sande wahrgenommen hat. *) Insbesondere bemerkt Hagen, daß der horizontale Druck, den eine Sandschüttung gegen eine verticale Wand ausübt, dem Quadrate der Schüttungshöhe proportional ist, vorausgesetzt, daß die Oberfläche ganz wagrecht abgeglichen ist und daß die Wand, welche den fraglichen Druck erfährt, bis zu dieser Oberfläche heraufreicht. Unter Beibehaltung der Bezeichnungen des vorigen Zusatzes setzt daher Hagen diesen Druck

$$R = A \frac{\gamma'}{2} b h^2, \text{ wenn}$$

γ' das Gewicht der Cubikeinheit des Sandes und A eine von der Natur des letztern abhängige Constante bezeichnet.

Hagen ermittelt insbesondere die Reibung einer Sandschüttung gegen einen Cylinder, der überall von ihr umgeben wird. Bezeichnet dabei f den Reibungscoefficienten zwischen Sand und

*) Hagen, Wasserbaukunde, Bd. 1, S. 506 und Navier, Mechanik der Baukunst §. 269.

Cylinder, ferner r den Radius der kreisförmigen Basis des letztern, so ist zuerst $b = 2r\pi$ und die Reibung

$$f \cdot R = fA \cdot \gamma' r\pi h^2.$$

Für eisenhaltigen Streusand, und wenn der bemerkte Cylinder ein gläserner war, fand Hagen $\gamma' = 2{,}82$ Loth, $fA = 0{,}12$, wenn der rheinländische Zoll als Maßeinheit angenommen wurde. Für feines Schrot, wo $\gamma = 8{,}245$ eben so $fA = 0{,}135$ etc.

§. 15.

Der Satz des vorigen §. kann auch benutzt werden, um den Druck auf die gesammte Seitenfläche eines Gefäßes, d. h. auf alle Dreiecke, Parallelogramme u. s. w., woraus dieselbe besteht, zu berechnen. Sieht man die Größe der Wandstücken wieder als Gewichte an, die in parallelen, gegen den Wasserspiegel rechtwinkeligen Richtungen wirken müssen, so läßt sich, ähnlich wie vorher, zeigen, daß der Druck, den sämmtliche Seitenwände erfahren, dem Gewichte eines Wasserkörpers gleich ist, welcher aus der Summe der Inhalte dieser Flächen multiplicirt mit dem Abstande des Schwerpunctes des ganzen Systemes vom Wasserspiegel besteht. Zu beachten ist jedoch hierbei, daß hier der Gesammtdruck nicht, wie im vorigen §., als Mittelkraft, sondern als der Inbegriff der Normaldrücke zu betrachten ist, welche jede der Flächen für sich allein erfährt. In diesem Sinne läßt sich bemerkte Regel auch auf den Gesammtdruck anwenden, den irgend eine krumme Seitenfläche erleidet, d. h. man muß diesen Druck als den Inbegriff der Normaldrücke ansehen, wovon jeder senkrecht auf der Ebene steht, welche als Berührende für jede der Elementarflächen gedacht werden kann.

Anmerkung. Die Frage, in wiefern sich zu diesen einzelnen Normaldrücken eine Mittelkraft angeben läßt, ob eine einzige solche in allen Fällen ausreicht, und wo der Angriffspunct liegt, bleibt später folgenden Betrachtungen überlassen.

§. 16.

Zur Erläuterung und Anwendung der Sätze vorstehender Paragraphen mögen hier einige Aufgaben folgen.

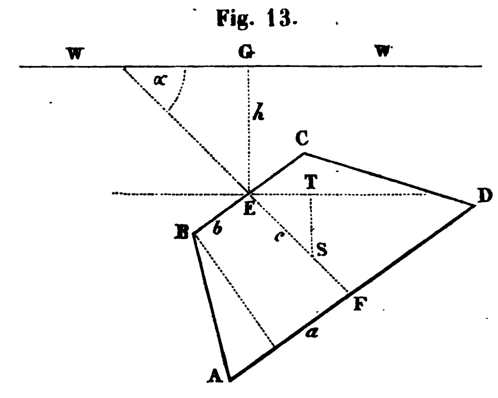


Fig. 13.

Aufgabe 1. Es ist der Normaldruck des Wassers gegen ein Trapez $ABCD$, Fig. 13, zu bestimmen, welches sich in einer gegen den Wasserspiegel WW oder dem Horizonte unter einem Winkel $= \alpha$ geneigten Ebene befindet, und dessen parallele Seiten AD und BC horizontal sind. Die oberste Seite BC liege unter dem Wasserspiegel in einer verticalen Tiefe $EG = h$, ferner sei $AD = a$, $BC = b$, und der rechtwinkelige Abstand letzterer beiden Seiten $EF = c$.

Auflösung. Wir finden zuerst die Druckhöhe des Trapezes und nehmen deßhalb an, daß sich der Schwerpunct derselben in S befinde. Nach §. 47 Geostatik ist sodann

$$ES = \frac{c}{3} \cdot \frac{2a+b}{a+b},$$

und daher der Verticalabstand ST des Punctes S, von einer durch die oberste Seite BC parallel zum Wasserspiegel gelegten Ebene,

$$ST = \frac{c}{3} \cdot \frac{2a+b}{a+b} \cdot \sin . \alpha.$$

Für die Druckhöhe $= EG + ST = z$ erhält man sonach

$$z = h + \frac{c}{3} \cdot \frac{2a+b}{a+b} \sin . \alpha,$$

Es ist aber der Flächeninhalt des Trapezes $= \frac{c}{2}(a+b)$, folglich der gesuchte Normaldruck $= P$ nach §. 14

$$P = \gamma \cdot \frac{c}{2}(a+b)\left(h + \frac{c}{3} \cdot \frac{2a+b}{a+b} \sin . \alpha\right), \text{ oder:}$$

$$\text{I.} \quad P = \frac{c\gamma}{6}\left\{3(a+b)h + c(2a+b)\sin\alpha\right\}.$$

Liegt die größere Seite AD des Trapezes dem Wasserspiegel zugekehrt, so erhält man auf gleichem Wege:

$$\text{II.} \quad P = \frac{c\gamma}{6}\left\{3(a+b)h + c(a+2b)\sin\alpha\right\}.$$

Zusatz 1. Für ein Rechteck ist unter sonst gleichen Umständen, wegen $a = b$,

$$P = \gamma ac\,(h + \tfrac{1}{2}\,c\,.\,\sin\alpha),$$

und wenn dessen obere Seite mit dem Wasserspiegel zusammenfällt, also $h = 0$ ist:

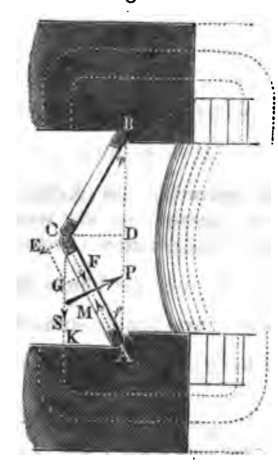
$$P = \tfrac{1}{2}\,\gamma ac^2\,.\,\sin\alpha.$$

Im Falle die gedrückte Fläche ein Dreieck ist, hat man b oder a gleich Null zu setzen, je nachdem die Spitze nach oben oder unten gekehrt ist.

§. 17.

Aufgabe 2. Es ist die Kraft zu bestimmen, womit die Riegelhölzer bei Schleußen-Stemmthoren zusammengedrückt werden, so wie anzugeben, wie betreffende Dimensionen berechnet werden können.

Fig. 14.



Auflösung. Es sei Fig. 14 Grundriß und Fig. 15 Aufriß eines Theiles vom sogenannten Oberhaupte einer Schleuße, wobei man das geschlossene Stemmthor, Drempel (Schlagschwelle), die Umläufe (Kanäle) etc. für gegenwärtigen Zweck hinlänglich erkennen wird. Die lichte Weite AB der Thoröffnung sei $= w$, die Pfeilhöhe $DC = e$, so daß das Verhältniß $\frac{e}{2w}$ (im Mittel $\frac{1}{5}$), ferner $\angle DAC = \varphi$ (gegen 20^0) und endlich die Thorflügellänge $= l$ als ebenfalls bekannt anzunehmen sind. Die Entfernung zweier Riegel eines jeden Thores sei, von Mitte zu Mitte derselben gemessen $= b$ und die entsprechende Wasserdruckhöhe $= h$.

Fig. 15.



Die Normalpressung $= P$ des Wassers gegen den Theil eines Thores welcher zwischen zwei Riegelmitten liegt, ist folglich

$$(1)\quad P = \gamma bl \,.\, h = \gamma bh \,.\, \frac{w}{2\cos\varphi}.$$

Wir ersetzen ferner den zweiten Thorflügel durch einen Gegendruck $= S$ und bestimmen dessen Größe durch die Momentengleichung:

$$S \,.\, \overline{AK} = P.AM, \text{ d. i.}$$

$$S.l\sin\varphi = P \,.\, \frac{l}{2}, \text{ und}$$

$$S = \frac{P}{2\sin\varphi}.$$

Die Kraft $CF = K$, womit der Riegel zusammengedrückt wird ist folglich

$$\text{I.}\quad K = S\cos\varphi = \frac{P}{2\,tg\,\varphi} = \frac{\gamma bh}{4} \,.\, \frac{w}{\sin\varphi}.$$

Wegen der Composante CE von S, welche in C rechtwinklig auf der Thorebene steht und deren Größe $CE = S \,.\, \sin\varphi = \frac{P}{2}$ ist, verhält sich die Thorhälfte MC in Betracht von Kräften, welche dieselbe zu biegen sich bestreben, gerade so als wenn der Flügel in der Mitte M eingemauert (festgehalten) würde, am Ende C die Normalkraft $\frac{P}{2}$ wirke und über die Länge $\overline{MC}$ ein Gewicht $\frac{P}{2}$ gleichförmig verbreitet wäre. Das größte statische Moment dieser beiden Normalkräfte in Bezug auf M ist aber: $-\frac{P}{2} \,.\, \frac{\overline{MC}}{2} + \frac{P}{2} \,.\, \overline{MC} = +\frac{P}{4} \,.\, \overline{MC} = \frac{Pl}{8}$. Bezeichnet daher p das Tragvermögen des Riegels auf die Flächeneinheit bezogen, und bildet er im Querschnitte ein Rechteck von der Höhe a und Dicke c vom Inhalt $A = ac$, so folgt:

$$p = \frac{P}{2A\,tg\varphi} + \frac{U}{T} \,.\, \frac{Pl}{8} \text{*)},$$

---

*) Nach I. §. 105 meiner Geostatik ist nämlich für die Zusammendrückung pr. Längeneinheit durch einen Axendruck $= Q$ zu setzen: $\frac{Q}{AE}$. Eben so nach S. 146 für eine Biegung pr.

wo U die von der neutralen Axe am entferntesten liegende Faser und T das Trägheitsmoment des Rechtecks in Bezug auf eine Axe bezeichnet, welche in der Ebene der Figur liegt und durch den Schwerpunct derselben geht. Hiernach also $U = \frac{c}{2}$, $T = \frac{1}{12} ac^3$ und somit ist:

$$\text{II.} \quad p = \frac{P}{2ac \cdot tg\varphi} + \tfrac{3}{4} \frac{Pl}{ac^2}.$$

Hierbei ist von dem eigenen Gewichte des Thores noch abgesehen.

Zusatz 1. Führt man in (II) den Werth von P aus (1) und $l = \frac{w}{2\cos\varphi}$ ein, so folgt:

$$p = \frac{\gamma bhw}{4ac} \left\{ \frac{1}{\sin\varphi} + \tfrac{3}{4} \frac{w}{c} \frac{1}{\cos\varphi^2} \right\}.$$

Letzterer Werth wird aber in Bezug auf φ eine Eminenzie, wenn man φ aus der Gleichung berechnet:

$$\text{III.} \quad \sin\varphi^4 - 2m \cdot \sin\varphi^3 - 2\sin\varphi^2 + 1 = 0, \text{ wo } m = \frac{3w}{4c} \text{ ist,}$$

woraus man den vortheilhaftesten Winkel φ entnehmen kann.

Beispiel. Setzt man mit Hagen (Wasserbauk. II. Theil. Bd. 3. S. 95 und 106) $c = 13$ Zoll, $w = 30$ Fuß, so ergiebt sich aus III die Wurzel: $+ 0{,}254$ oder φ nahe zu 18 Grad.

Zusatz 2. Barlow findet nach sehr unklarem Entwickelungsgange unter allen Umständen (Transactions of the Institution

---

Längeneinheit $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ durch eine Normalkraft zur Körperaxe: $\frac{u}{\varrho}$, oder wegen $\frac{1}{\varrho} = \frac{S}{ET}$, wo S die Momentensumme bezeichnet, $\frac{u}{\varrho} = \frac{uS}{ET}$. — Setzt man jetzt für u und S die größten Werthe, z. B. U statt u etc., so folgt die Ausdehnung zufolge der combinirten Kraftwirkung zu:

$$\frac{Q}{AE} + \frac{US}{ET},$$

welcher Werth nach III §. 105 Geostatik $= \delta = \frac{p}{E}$ zu setzen, also zu schreiben ist:

$$p = \frac{Q}{A} + \frac{US}{T}, \text{ was z. B. w.}$$

of Civil Engineers. Vol. I. p. 72) zur Bestimmung von φ die Gleichung

$$tg\varphi^3 + \tfrac{1}{20}\, tg\varphi^2 = \tfrac{1}{12},$$

welche $\varphi = 19^\circ 25'$ giebt.

Woltmann in seinem Werke: »Beiträge zur Schiffbarmachung der Flüsse« findet S. 232, nach höchst sonderbarer Herleitungsweise zur Bestimmung von φ die Gleichung

$$\frac{1}{sec.\varphi^2\, cosec.\varphi} + \frac{1}{sec.\varphi^2} = \text{Maxim., woraus}$$

$$\varphi = 19^\circ 28'.$$

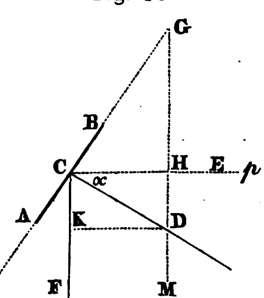
Belidor in seiner hydraulischen Architektur (2. Theil. §. 164) gab bereits viel früher $\varphi = 22\tfrac{1}{2}$ Grad an.

§. 18.

Druck des Wassers nach bestimmten Richtungen.

Bei technischen Untersuchungen wird es sehr oft nöthig, den Druck anzugeben, welchen das Wasser gegen Gefäßwände nach einer vorgeschriebenen Richtung, die von der des Normaldruckes verschieden ist, ausübt. Nachstehendes sei zur Herleitung der hierbei stattfindenden Gesetze bestimmt.

Fig. 16.



Ist AB, Fig. 16, ein nach allen Seiten hin unendlich kleines Stück einer Gefäßwand, so kann man die Richtungen des Druckes auf dasselbe, gleichgültig, ob solches eben oder krumm, als unter einander parallel annehmen, so daß die ihnen zugehörige Mittelkraft der Summe der Drücke auf die einzelnen Puncte desselben Elementes gleich ist. Es sei nun C der Angriffspunct, CD Richtung und Größe dieser Mittelkraft, und man soll angeben, wie stark AB nach einer von CD verschiedenen Richtung, z. B. der CE, die mit ersterer den Winkel $DCE = \alpha$ einschließt, gedrückt wird. Zu diesem Ende zerlege man CD in zwei Seitenkräfte CH und CK, wovon erstere mit CE zusammenfällt, letztere auf CE rechtwinkelig steht. Da nun sodann CK in der bezeichneten Richtung keine Wirkung äußern kann, so muß CH den gesuchten Druck darstellen. Setzt man daher den Inhalt des Elementes $AB = a$, die zugehörige Druckhöhe $= h$, so ist der Normaldruck $CD = \gamma . ah$, und der Druck nach der Richtung $CE = CH = CD \cos . \alpha = \gamma ah . \cos . \alpha$. (1).

Denkt man sich jetzt AB als Durchschnittslinie der Ebene, in welcher der Winkel DCE liegt, mit der Elementarfläche und führt durch die genannte Ebene eine zweite auf CE und somit auch auf der DCE rechtwinkelig stehende Ebene, so wird, wenn GM die Durchschnittslinie letzterer beiden Ebenen ist, CGM der Neigungswinkel sein, welchen das Wandelement mit der Ebene GHM bildet. Denkt man sich ferner das Element AB auf die Ebene GHM projicirt, so stellt nach Sätzen der Geometrie $a \,.\, \cos \angle CGM$, oder (da $\angle CGM = \angle DCE = \alpha$ sein muß) $a \cos . \alpha$ die gedachte Projection dar. Demnach erhält man aus (1), wenn $a \cos . \alpha = f$ gesetzt wird, für den Druck $= p$ nach der Richtung EC:

$$p = \gamma . fh.$$

Es ist also der Druck des Wassers nach irgend einer Richtung gegen eine beliebige Elementarfläche gleich dem Normaldrucke gegen die rechtwinkelig zur bezeichneten Richtung genommene Projection der Elementarfläche, wenn für beide Fälle einerlei Druckhöhe vorausgesetzt wird. Ueberhaupt ergiebt sich aber der wichtige Satz:

Der Druck, welchen ein beliebiges Element einer Gefäßwand nach irgend einer bestimmten Richtung erfährt, wird stets erhalten, wenn man die Projection dieses Elementes auf eine Ebene sucht, welche rechtwinkelig auf der bezeichneten Richtung steht, und die Fläche der Projection mit der Druckhöhe multiplicirt, die der gedrückten Fläche zukommt.

Zusatz 1. Unanwendbar könnte dieser Satz auf den Druck erscheinen, den irgend eine krumme Fläche von willkürlicher Größe nach einer bestimmten Richtung erfährt, indem hier die Normaldrücke auf die Elemente der krummen Fläche nicht, wie bei ebenen Flächen, unter einander parallel gerichtet sind.

Um hierüber Aufschluß zu erhalten, bestimmen wir den Normaldruck auf jedes Element der krummen Fläche und zerlegen jeden solchen (nach §. 30 Geostatik) in drei Seitenkräfte, die respective dreien rechtwinkeligen Coordinatenaxen parallel sind, und worauf sich die zugehörigen Resultirenden, im Allgemeinen zwei, werden finden lassen. Allein für unseren Fall, wo der Druck nur nach einer vorgeschriebenen Richtung angegeben werden soll, braucht der letztere Theil der bemerkten Arbeit nicht vorgenommen zu werden, wenn man nur eine der drei Coordinatenaxen in die bezeichnete Richtung legt. Hat man z. B. die Axe der Z, die auf der Ebene XY rechtwinkelig steht, in der vorgeschriebenen Druckrichtung angenommen, so wird

nur nöthig sein, den Normaldruck auf jedes Element mit dem Cosinus des Winkels zu multipliciren, den die Richtung jenes Druckes mit der Axe der Z, oder, was dasselbe ist, den die Berührungsebene für ein solches Element mit der Ebene XY macht. Die Producte dieser Elemente in die respectiven Cosinus sind sodann nichts Anderes, als die Projectionen der Elemente auf die Ebene XY. Legt man daher diesen Projectionen, wie es §. 14 geschah, Gewichte bei, so läßt sich auf dem an gedachtem Orte gewählten Wege auch hier überhaupt zeigen,

daß der Druck nach einer bestimmten Richtung gegen eine krumme Fläche gleich dem Gewichte einer Wassersäule ist, welche die rechtwinkelig zur bezeichneten Richtung genommene Projection der krummen Fläche zur Basis und die Druckhöhe der krummen Fläche zur Höhe hat.

Zusatz 2. Hiernach läßt sich ohne Weiteres der Druck angeben, welchen, in verticaler Richtung die (krummen) Mantelflächen eines Kegels und einer Halbkugel erfahren, wenn solche ganz mit Wasser gefüllt sind, und wenn r den Halbmesser der kreisförmigen Kegelbasis so wie der Kugel und h die Höhe des Kegels bezeichnet.

Die Projection der gedrückten Flächen rechtwinkelig gegen die Verticale ist $= r^2\pi$, die Druckhöhe für den Kegel $= \frac{2}{3} h$, wenn dessen Spitze nach Oben gekehrt ist und die Druckhöhe für die Halbkugel $= \frac{1}{2} r$, wenn vorausgesetzt wird, daß deren größter Kreis mit dem Wasserspiegel zusammenfällt. Sonach der anzugebende Druck

für den Kegel: $\gamma r^2\pi \,.\, \frac{2}{3} h = \frac{2}{3} \gamma\pi r^2 h$;

für die Halbkugel: $\gamma r^2\pi \,.\, \frac{1}{2} r = \frac{1}{2} \gamma\pi r^3$.

Zugleich lösen sich hierbei die letzten Zweifel (Anmerkung 1, §. 8) über Bodendrücke (das sogenannte hydrostatische Paradoxon). So ist z. B. der Bodendruck bei dem so eben betrachteten Kegel: $\gamma r^2\pi h$. Wegen der festen Verbindung des Mantels mit diesem Boden und weil der Druck auf den Mantel nach verticaler Richtung aufwärts, der Bodendruck aber abwärts gerichtet ist, ergiebt sich sonach ein resultirender Druck nach unten:

$$\left[\gamma r^2\pi h - \frac{2}{3}\gamma\pi r^2 h\right] = \frac{\gamma}{3}\pi r^2 h,$$

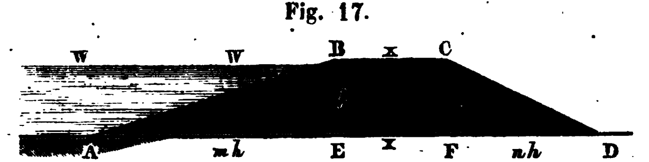
d. h. wie ganz richtig, eine Kraft, welche gleich dem Gewicht des im Kegel befindlichen Wassers ist.

§. 19.

Aufgabe 1. Man soll die obere oder Kronen-Breite eines aus Erde aufgeführten Deichdammes unter der Voraussetzung berechnen, daß derselbe vom Wasserdrucke nicht auf seiner Grundfläche *AD* fortgeschoben werden kann.

Auflösung. Es sei *ABCD*, Fig. 17, das wenigstens der Form nach festgestellte Dammprofil, seine Höhe $BE = CF = h$,

Fig. 17.



die äußere Böschung *AB* habe eine m (wenigstens drei) fache, die innere *CD* eine n (wenigstens zwei) fache Anlage, so daß $AE = mh$, $FD = nh$ ist, die Dammlänge sei $= l$. Das Gewicht der Cubikeinheit Erdmasse werde mit q und der Reibungscoefficient zwischen Dammkörper und dessen Grundfläche mit f bezeichnet.

Für den Zustand des Gleichgewichts wird letztere Reibung dem Horizontaldrucke des Wassers das Gleichgewicht zu halten haben. Beachtet man hierzu, daß der die Reibung erzeugende Druck aus dem Gewichte des Dammkörpers besteht, diesen vermehrt um den Verticaldruck des Wassers und setzt man die Kronenbreite $BC = x$, so erhält man ohne Weiteres:

$$\tfrac{1}{2}\gamma h^2 l = fqhl\left[x + \frac{h}{2}(m+n)\right] + f\frac{\gamma m h^2 l}{2}.$$

In vielen Fällen wird man indeß annehmen müssen, daß der Dammkörper nach und nach ganz vom Wasser durchdrungen wird, so daß statt obigem Dammgewichte ein anderes nämlich $(q-\gamma)hl\left[x + \frac{h}{2}(m+n)\right]$ in Rechnung zu bringen, der Verticaldruck $\frac{1}{2}\gamma m h^2 l$ des Wassers aber ganz wegzulassen sein wird, indem diesen das Grundwasser des Bodens im Gleichgewichte hält. Nimmt man überdies, der Sicherheit wgen, das $1\frac{1}{2}$ fache des Horizontaldruckes in Rechnung, so folgt endlich:

$$\tfrac{3}{4}\gamma h^2 = f(q-\gamma)\left[x + \frac{h}{2}(m+n)\right]h, \text{ woraus sich ergiebt:}$$

$$x = \frac{3\gamma h}{4f(q-\gamma)} - \frac{h}{2}(m+n).$$

Praktische Anforderungen verlangen gewöhnlich x noch größer zu nehmen als diese Formel giebt.

§. 20.

Aufgabe 2. Man soll die erforderliche Stärke cylindrischer Röhren angeben, damit dieselbe einem bestimmten Flüssigkeitsdrucke widerstehen können.

Fig. 18.

Auflösung. Als entsprechende Vorbereitung zur Lösung dieser Aufgabe untersuchen wir zuerst, welche Spannung $= t$ in zwei auf einander folgende Seiten AB und AD eines elastischen Polygons, Fig. 18, hervorgerufen wird, wenn gegen den Winkelpunct A dieser Seiten ein Normaldruck $= p$ ausgeübt wird. Hierzu sei $AO = \varrho$ der Krümmungshalbmesser des sehr kleinen Bogens, zu dessen Endpunkten AB und AD Tangenten sind, ferner $\angle BOD = \varphi$.

Zufolge §. 12 der Geostatik hat man, zunächst: $p = 2t \cos \frac{1}{2} (180 - \varphi) = 2t \sin \frac{1}{2} \varphi$. Wegen Kleinheit von φ ist der Sinus mit dem Bogen zu verwechseln, so daß folgt: $p = t . \varphi$. Bezeichnet ferner s die Länge des Bogens BD, so ist $s = \varrho\varphi$ und folglich $p = \frac{t . s}{\varrho}$, oder wenn man $s =$ der Einheit annimmt:

$$(1) \quad p = \frac{t}{\varrho}, \text{*)} \text{ oder}$$

$$t = p\varrho.$$

Da man sich die unendlich kleinen Polygonseiten mit dem unendlich kleinen Bogen des Radius ϱ zusammenfallend vorstellen kann, so folgt aus (1) auch, daß man die Axenspannung in einem beliebigen Puncte einer ebenen Curve findet, wenn man den daselbst stattfindenden Normaldruck mit den Krümmungshalbmesser für diesen Punct multiplicirt.

Bildet die Curve einen Kreisbogen, so bezeichnet ϱ den Radius, womit derselbe beschrieben ist und daher ϱ eine Constante. Ist ferner die Curve eine geschlossene und bildet sie

---

*) Ein bereits von d'Alembert aufgefundenes Gesetz. Traité des Fluides §. 4 p. 4.

überdies den Querschnittsumfang einer Röhre, deren Querschnitt ein Kreis vom Radius $= r$ ist, so stellt

$$(2)\quad t = pr$$

die Spannung in der Richtung der Röhrenquerschnitte unter der Voraussetzung dar, daß p der überall gleiche Druck auf die Flächeneinheit der Röhre ist.

Um die Spannung der Röhrenwand in der Richtung der Seiten einer cylindrischen Röhre zu erhalten, denken wir uns dieselbe an beiden Enden geschlossen, so daß diese Endflächen eine Pressung $= pr^2\pi$ erfahren. Sodann erleidet aber die Einheit vom Umfang der Röhren eine Axenspannung $= t$, welche gleich sein muß

$$(3)\quad t = \frac{pr^2\pi}{2r\pi} = \frac{pr}{2}.$$

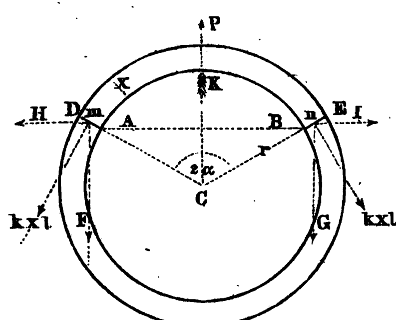
Aus (2) und (3) folgt nun der bemerkenswerthe Satz, daß bei einer Röhre, welche von einer Flüssigkeit einen überall gleichen Druck erfährt, die Spannung in der Seitenrichtung, parallel der Röhrenaxe, nur halb so groß ist wie die Spannung in der Richtung der Querschnitte.

Werden daher die Wand-Stücke einer Röhre so genommen, daß Längenrisse nicht eintreten können, so ist dieselbe noch mehr gegen Zerstörungen in der Richtung der Querschnitte gesichert.

Unter diesen Voraussetzungen berechnen wir die Wandstärke $= x$ einer Röhre von kreisförmigem Querschnitte, wenn r der innere Radius derselben ist und die Flüssigkeit, welche gegen die Röhre drückt, dieselbe füllt, die Druckkraft also von Innen nach Außen gerichtet ist.

Ein beliebiges Stück der Röhrenwand von der Länge $= l$ und dem zugehörigen Centriwinkel $DCE = 2\alpha$, Fig. 19, lasse zuerst dergleichen Längenrisse bei D und E erwarten, wobei die Flächen $x \cdot l$ bei AD und BE mit einer Kraft kxl rechtwinklig gegen AD und BE widerstehen, wenn k das sogenannte Tragvermögen (§. 106 Geostatik) des vorhandenen Röhrenmaterials pr. Flächeneinheit bezeichnet. Der Druck P nach der bestimmten

Fig. 19.



Richtung. CK rechtwinklig auf die Sehne des Bogens AKB ist ferner, wenn H die Druckhöhe der Flüssigkeit über der betreffenden Stelle bezeichnet,

$$P = \gamma \,.\, \overline{AB} \,.\, l \,.\, H, \text{ oder weil } \overline{AB} = 2r \sin\alpha \text{ ist,}$$

$$(1) \quad P = 2\gamma r\, lH \,.\, \sin\alpha.$$

Diesem Drucke entgegen wirken die zur Richtung von P parallelen Composanten mF und nG von kxl, während sich die zu P rechtwinkligen mH und nI wechselseitig vernichten. Es ist aber

$$mF + nG = 2kxl \,.\, \sin\alpha,$$

woraus für's Gleichgewicht mit (1) verglichen folgt:

$$2kxl \sin\alpha = 2\gamma rl \,.\, H \sin\alpha, \text{ d. i.}$$

$$x = \frac{\gamma}{k} r \,.\, H, \text{ oder wenn } 2r = D \text{ eingeführt wird}$$

$$\text{I.} \quad x = \frac{\gamma}{2k} \,.\, D \,.\, H.$$

Hieraus folgt zugleich, daß große und kleine Stücke der Röhre mit gleicher Wahrscheinlichkeit von der drückenden Flüssigkeit herausgetrieben werden können, da in I. weder α noch l enthalten ist.

Um vorstehenden Ausdruck für die Praxis möglichst brauchbar zu machen, sind an demselben entsprechende Correctionen anzubringen. Vorerst ist klar, daß er nicht eine solche Form behalten kann, wo für $H = 0$ auch $x = 0$ wird, da wegen der eigenen Stabilität der Röhre, selbst wenn kein Druck stattfindet, ferner bei gegossenen Röhren, wenn der Guß überhaupt noch möglich sein soll, immerhin eine gewisse Wanddicke vorhanden sein muß. Sodann wird es auch sicherer sein, den für gleiches Material und dieselbe Flüssigkeit constanten Factor $\frac{\gamma}{2k}$ durch directe Versuche zu ermitteln. Bezeichnet daher c die kleinste Dicke, welche man einer Röhre überhaupt noch geben darf, und wird $\frac{\gamma}{2k} = \mu$ gesetzt, so folgt aus I.

$$\text{II.} \quad x = \mu \,.\, DH + c.$$

Nach D'Aubuisson*) ist für gußeiserne Röhren und Metermaße $\mu = 0{,}00015$, $c = 0{,}^{m}01$, folglich für dieses Material

$$x = 0{,}^{m}00015\, DH + 0{,}^{m}01.$$

*) Traité d'hydraulique; 2. éd. Paris 1840, p. 252.

Sehr empfehlenswerth sind die für μ und c aus Erfahrung entnommenen Werthe Genieys*). Derselbe führt in H. statt H die Anzahl der Atmosphären $= n$ ein, die dem jedesmaligen Drucke entsprechen, jede derselben zu 10 Meter Druckhöhe gerechnet, und setzt sodann, alle Maße in Metern ausgedrückt,

für bleierne Röhren $x = 0{,}005\, nD + 0{,}0045$,
– gußeiserne – $x = 0{,}0007\, nD + 0{,}01$
– Röhren von Eisenblech $x = 0{,}0005\, nD + 0{,}003$,
– – – natürlichem Gestein $x = 0{,}05\, nD$,
– – – künstlichem – (Cement) $x = 0{,}1\, nD$,
– hölzerne Röhren $x = 0{,}833\, nD + 0{,}027$.

D'Aubuisson, wie Genieys rathen übrigens, um recht sicher zu gehen, alle Röhren auf 100 Meter Druckhöhe zu prüfen, wonach in die Formel des ersteren $H = 100$, in die Formeln des letzteren $n = 10$ gesetzt werden müßte.

Morin**) empfiehlt neuerdings nachstehende, allgemein angenommene Formeln:

Röhren aus Eisenblech: $x = 0{,}00986\, D\,(n-1) + 0^m{,}0030$
– – Gußeisen: $x = 0{,}00238\, D\,(n-1) + 0{,}0085$
– – Kupfer: $x = 0{,}00148\, D\,(n-1) + 0{,}0040$
– – Blei: $x = 0{,}00242\, D\,(n-1) + 0{,}0050$
– – Zink: $x = 0{,}00620\, D\,(n-1) + 0{,}0040$
– – Holz: $x = 0{,}03230\, D\,(n-1) + 0{,}0270$
– – Stein (natürlicher) $x = 0{,}03690\, D\,(n-1) + 0{,}0300$
– – – (künstlicher) $x = 0{,}05380\, D\,(n-1) + 0{,}0400$

Hierbei bezeichnet D, wie vorher, den inneren Röhrendurchmesser in Metern, n den Druck der Flüssigkeit in Atmosphären, dabei jedoch den Druck der äußeren Atmosphäre vorher nicht abgezogen.

Die in Frankreich gesetzlich vorgeschriebene Wanddicke von Dampfkesseln aus Eisen- oder Kupfer-Blech wird durch die Formel bestimmt: $x = 1{,}8\, D\,(n-1) + 3$, wo x die Wanddicke in Millimetern bezeichnet, D den Kesseldurchmesser in Metern und n die Atmosphärenzahl der größten Spannung, welcher der Kessel ausgesetzt werden darf.***)

*) Essai sur les moyens de conduire, d'élever et de distribuer les eaux. Paris 1829. p. 177.

**) Aide-mémoire. §. 458. Paris 1847. p. 384.

***) Man sehe das französische Gesetz von 1843 über Dampfkessel und Dampfmaschinenanlagen in den Annales des Ponts et Chaussées, 1843, 1, 372. — Das österreichische Gesetz etc.: Balling Encyclopädische Zeitschrift des böhmischen Gewerbevereins von 1845, S. 28. — Das belgische Gesetz: Hülße, Polytechn. Centralblatt, 1846, S. 339. — Das sächsische Gesetz ebendaselbst Jahrg. 1849, S. 1470 und 1850, S. 120 auch 1851, S. 1143.

Zusatz 1. Vorstehende Erfahrungsformeln sind auch für Röhren brauchbar, deren Querschnittsfläche nicht von einer Kreislinie begrenzt wird, sobald man nur für D das Doppelte des größten Krümmungshalbmessers der betreffenden Begrenzungscurve substituirt. So ist z. B. für eine Röhre von elliptischem Querschnitte, wobei a die halbe große und b die halbe kleine Axe der Ellipse ist: $D = 2\frac{a^2}{b}$ zu setzen etc.

Ueberhaupt sind aber andere als kreisförmige Querschnitte für alle Röhren zu vermeiden, deren Wände großen Drücken zu widerstehen haben, weil bei nicht kreisförmigen Querschnitten die Drücke an den verschiedenen Stellen des Querschnittsumfanges verschieden sind und hiernach ein Bestreben entsteht die Form der Wand zu ändern, was bei kreisförmigen Querschnitten nicht der Fall ist.

Zusatz 2. Der Ausdruck I wurde zuerst von Mariotte aufgestellt und ist derselbe mit den angebrachten Correctionen unbedingt als für praktische Zwecke brauchbar anzunehmen. Da Mariotte von Elastizität und Ausdehnung der Röhre ganz abgesehen hat, haben später andere Männer, wie Barlow und Brix, die Herleitung von noch anderen Formeln versucht, deren praktischer Werth, der Natur der Sache nach, jedoch nicht höher steht als der der Mariotte'schen Formel. Barlow findet $x = \frac{pr}{k-p}$, wo r den innern Röhrenhalbmesser bezeichnet, k der absolute Festigkeitscoefficient ist und p die Pressung pr. Flächeneinheit darstellt.

Brix findet $x = r\left(e^{\frac{p}{k}} - 1\right)$, wo $e = 2{,}71828$ ist.

Letztere Formel ist zur Wandstärkenbestimmung für Dampfkessel aus Eisen- und Kupfer-Blech in Preußen gesetzlich vorgeschrieben *) und zwar unter der Form:

$$x = r(2{,}71828^{0{,}003.n} - 1) + 0{,}1,$$

wo r den Radius des Dampfkessels in (preuß.) Zollen und n die Zahl der Atmosphären über den äußern Luftdruck bezeichnet und x in Zollen erhalten wird.

Für Röhren aus gewalztem oder gehämmertem Messing sind die doppelten Werthe von x als Wandstärke zu nehmen.

Was erfahrene Practiker von allen diesen Formeln (und ich glaube mit Recht) halten, findet man in Dingler Journal Bd. 111, S. 83 etc.

Zusatz 3. Ist die cylindrische Röhre von kreisförmigem Querschnitte nicht Drücken unterworfen, wie bis jetzt im Vor-

*) Preußisches Dampfkesselgesetz: Polytechn. Centralblatt 1838, Bd. 2, S. 603—618.

stehenden überall angenommen, welche von Innen nach Außen gerichtet sind, sondern solchen, die von Außen nach Innen wirken, wie dies z. B. bei den Heizröhren der Dampfwagen und mancher Schiffsdampfkessel der Fall ist, so hängt die Berechnung der Wanddicke ganz von der Größe und Art der Abweichung von der kreisförmigen Querschnittsform ab. Was die Art der Abweichung oder die Gestalt der aus der Kreisform gebrachten Querschnitte betrifft, so scheinen die bis jetzt gemachten Erfahrungen auf die elliptische Form hinzuweisen, so daß die Berechnung in der Behandlung der Aufgabe bestehen würde, die Dicke eines (elastischen) Streifens von elliptischer Form (Ellipsenbogens) zu bestimmen, der mit den Enden eingemauert ist, während über die ganze Länge ein Druck gleichförmig verbreitet ist, in welcher Beziehung auf Navier's Baumechanik §. 671 verwiesen werden kann. Immerhin bleibt aber eine solche Rechnung gewagt, um sichere Schlüsse für die Praxis daraus zu ziehen, da beinah gar nicht abzusehen ist, wie man die Größe der Formänderung (das Verhältniß der großen und kleinen Ellipsenaxe) im Voraus feststellen soll. Einen derartigen Versuch hat Weisbach in seiner Ingenieur-Mechanik, Bd. 2, §. 305, zweite Auflage gemacht, und höchst wahrscheinlich liegt ähnlichen Voraussetzungen die Herleitung der Formel unter, welche gleichfalls das bereits erwähnte preuß. Dampfkesselgesetz (a. a. O. S. 621) für Heizröhrenwanddicken mit innerer Feuerung vorschreibt. Gedachte Formeln sind $x = 0{,}0067\, d\sqrt[3]{n} + 0{,}05$ Zoll für Eisenblechröhren und $x = 0{,}01\, d\sqrt[3]{n} + 0{,}07$ Zoll für Messingröhren. (Man sehe auch das franz. Gesetz a. a. O. S. 375.) Hierbei ist d der Röhrendurchmesser in Zollen, das Uebrige wie Zusatz 2.

Man sehe auch Lamé und Decher über Stärke und Krümmung der Dampfkesselbleche in Dingler Bd. 116. S. 1—11.

Zusatz 4. Um die Wanddicke für kugelförmige Gefäße zu ermitteln werde angenommen, daß dieselbe in der Richtung ihrer größten Kreise zu reißen beginnen, so daß unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen der Druck dargestellt wird durch $\frac{\gamma D^2 \pi}{4} \cdot H$, so wie der Widerstand durch $kxD\pi$, woraus ohne Weiteres $x = \frac{\gamma}{4k} DH$, d. h. genau die Hälfte folgt, was unter I. erhalten wurde und wonach unter sonst gleichen Umständen die Wände von Kugelgefäßen die halbe Dicke von Cylindergefäßen von demselben Durchmesser zu besitzen brauchen.

Ganz allgemein läßt sich für Gefäßwände von doppelter Krümmung die Formel ableiten (Navier, Baumechanik §. 658):

$$p = f\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1}\right),$$

wobei f die Kraft bezeichnet, womit die Fläche nach allen Richtungen gespannt wird, während p den Normaldruck auf den Punct der Fläche bezeichnet, wo die beiden Hauptwerthe der Krümmungshalbmesser ϱ und ϱ_1 sind.

Setzt man hier für Kugel und Kugeltheile $\varrho = \varrho_1 = r$, so folgt $p = \frac{2f}{r}$ und $f = \frac{pr}{2}$, d. h. genau dasselbe, was so eben bewiesen wurde.

Zusatz 5. Um mindestens alle technisch wichtige Gegenstände hier erwähnt zu haben, werde auf die Berechnung von Wanddicken ebener Gefäßwände und Platten aufmerksam gemacht, was indessen vom mathematischen Gesichtspunkte aus zu den schwierigsten Untersuchungen seiner Art gehört.

Geht man z. B. von der Möglichkeit eines Bruches aus und läßt die voraus folgende Biegung außer Acht und denkt man sich eine solche Platte in schmale Streifen (Bänder) zerlegt, die respective ihren beiden Flächendimensionen b und l parallel sind, so hat man nach §. 119 der Geostatik für einen Streifen von der Länge $= l$ und Breite $= \frac{b}{n}$, wo n die Anzahl der Streifen bezeichnet, den Bruchwiderstand: $\frac{16}{6} k \frac{bx^2}{nl}$ und für einen Streifen von der Länge $= b$ eben so $\frac{16}{6} k \frac{lx^2}{nb}$, also für n Streifen nach beiden auf einander rechtwinkligen Richtungen den Widerstand: $\frac{16}{6} kx^2 \left(\frac{b}{l} + \frac{l}{b}\right)$, welcher Werth für's Gleichgewicht pbl, d. h. dem Drucke gleich sein muß, welcher auf die ganze Fläche ausgeübt wird. Man erhält daher

$$\frac{8}{3} kx^2 \left(\frac{b^2 + l^2}{bl}\right) = pbl \text{ und hieraus:}$$

$$x = bl \sqrt{\frac{3p}{8k(b^2 + l^2)}}.$$

Aus dieser Gleichung findet Verdam (Werkzeugwissenschaft und Mechanik, Thl. 4, Abth. 3. S. 188) für gußeiserne Platten: $x = 0{,}0374 \,.\, bl \,.\, \sqrt{\frac{p}{b^2 + l^2}}$, wenn nach Centimetern und Kilogrammen gerechnet wird.

Aehnliche Rechnungen führte auch Weisbach a. a. O. Seite 561 und Brix in den Berliner Verhandlungen 1849, Seite 145, letzterer zur Bestimmung von Kesselwandstärken, wo die Wände

durch Stehbolzen gehalten werden. Für die Blechstärken findet Brix (Zollmaße)

$$x = 0{,}0387 \, . \, a\sqrt{n},$$

wo a die Entfernung der Stehbolzen, n die Anzahl Atmosphären über den äußeren Luftdruck bezeichnet.

Für die Praxis am vollständigsten hat bis jetzt Biegung und Bruch elastischer Ebenen Navier (in einem am 14. Aug. 1820 der Pariser Academie übergebenen Mémoire) behandelt, wobei jedoch die Integration der betreffenden Differenzialfunctionen höherer Ordnung nur mit Hülfe der Fourier'schen Sinus- und Cosinus-Reihen bewerkstelligt werden konnte und in welcher Beziehung auf das Bulletin etc. Philomatique 1823, p. 92 verwiesen werden muß. Aus den Endresultaten dieser Untersuchungen (auch Navier Mechanik der Baukunst, §. 639 bis incl. §. 642) folgten, wenn a, b die Seitenlängen der rectangulären Platte, h deren Dicke, E der Elasticitätsmodul, R das Tragvermögen bezeichnet, die Annäherungswerthe:

Für die Größe der Durchbiegung $= u$:

$$u = \frac{45Q}{\pi^4 E h^3} \cdot \frac{a^3 b^3}{(a^2+b^2)^2},$$ wenn Q ein im Schwerp. der Platte befindliches Gewicht bezeichnet.

$$u = \frac{180p}{\pi^6 E h^3} \cdot \frac{a^4 b^4}{(a^2+b^2)^2},$$ wenn p das Gewicht bezeichnet, welches die Einheit d. Oberfläche trägt.

Für den Bruchwiderstand (bei gleichen Bezeichnungen w. vorher):

$$R \text{ pr. Flächeneinheit} = \frac{45\, Q\, ab^3}{2\pi^2 h^2 (a^2+b^2)^2}$$

$$R \quad - \quad - \quad = \frac{90\, p\, a^2 b^4}{\pi^4 h^2 (a^2+b^2)^2}$$

§. 21.

Fig. 20.

Aufgabe 3. Man soll eine Gleichung zur Berechnung der Querschnittsdimensionen eines gekrümmten Schleußenthores ABC, Fig. 20, entwickeln.

Auflösung. Behalten wir ganz die Bezeichnungen von Aufgabe 2 §. 17 bei, bezeichnen wir überdies den Wasserdruck pr. Längeneinheit des Bogens AB mit q, d. h. setzen $\gamma bh = q$, so ist die Axenspannung $= t$ nach voriger Aufgabe in der Curve

ABC an einer Stelle, wo ϱ der Krümmungshalbmesser: $t = q.\varrho$.

Nehmen wir *ABC* als einen Kreisbogen und setzen $AO = BO = r$, so folgt die überall gleiche Axenspannung

$$(1) \quad t = q.r.$$

Ersetzen wir jetzt wiederum die eine Hälfte *BC* durch eine Horizontalkraft $= S$, so ergiebt sich dieselbe, wegen $S.\overline{BD} = R.AF$, wo R den Wasserdruck $= q.\overline{AB}$ auf die Curve *AEB* in der Richtung *EO* bezeichnet, zu $S = q.\frac{AB}{BD}\ AF = q.\frac{AF}{\sin\varphi}$ *) $= q.r$ wie bereits in (1) gefunden. Aber $2\overline{AF}.\cos\varphi = \frac{w}{2}$, also $AF = \frac{w}{4.\cos\varphi}$, daher auch $S = \frac{qw}{4\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{qw}{2\sin 2\varphi} = \frac{\gamma bhw}{2\sin 2\varphi}$.

Wird endlich das Tragvermögen des Thormateriales pr. Flächeneinheit mit k und der Querschnitt mit A bezeichnet, so ist nach IV §. 105 u. 126 Geostatik (oder nach der Note §. 16):

$$\text{I.} \quad A = \frac{\gamma bhw}{2k\sin 2\varphi}.$$

Hierbei ist abermals das Thorgewicht unbeachtet gelassen. Man sehe deshalb Navier Baumechanik §. 574.

§. 22.

Vom Mittelpunkte des Druckes.

Unter dem Mittelpuncte des Druckes versteht man den Angriffspunct der Mittelkraft, welche den sämmtlichen, auf die einzelnen Puncte einer Fläche wirkenden Normaldrücken des Wassers entspricht. Zur Bestimmung statischer Momente ist die Kenntniß der Lage dieses Punctes durchaus nothwendig.

Bei (horizontalen) Bodenflächen, wo alle Elemente gleichen Druck erfahren, fällt der Mittelpunct des Druckes mit dem Schwerpuncte zusammen. Bei allen Seitenwänden liegt er dagegen stets unter dem Schwerpuncte derselben, weil hier die Drücke auf die einzelnen Puncte mit deren Tiefe unter dem Wasserspiegel zunehmen.

Zuerst werde der Mittelpunct des Druckes für ebene Seitenwände bestimmt, was nach dem Früheren einfach darin bestehen

---

*) Im $\triangle$ *AFO* ist $\angle\ AOF = \varphi$, folglich $\frac{AF}{AO} = \sin\varphi$ oder $\frac{AF}{\sin\varphi} = AO = r$.

wird, den Angriffspunct der Mittelkraft für ein System paralleler Kräfte zu suchen.

Für den Fall, daß die gedrückte Seitenwand durch eine gerade Linie in zwei symmetrische Theile getheilt wird, also zu beiden Seiten derselben gleiche Momente liegen, muß sich der zu suchende Angriffspunct in dieser Geraden befinden, und man wird nur nöthig haben, dessen Abstand von einer geraden Linie anzugeben, welche man in der Ebene der gedrückten Fläche als Momentenaxe angenommen hat.

Der Einfachheit wegen wählt man letztere entweder so, daß sie, durch den höchsten Punct der Fläche gehend, parallel zum Wasserspiegel liegt, oder daß sie mit der Linie zusammenfällt, in welcher die Ebene der gedrückten Fläche den Oberwasserspiegel schneidet.

Die gedrückte Fläche theilt man sodann in Elemente, deren Begränzungslinie parallel zur Momentenaxe sind, bestimmt die statischen Momente der Normaldrücke, welche diese Elemente erfahren, und dividirt deren Summe durch den Normaldruck auf die Gesammtfläche; der Quotient giebt den gesuchten Abstand des Druckmittelpunctes.

Läßt sich die Seitenwand nicht, wie vorbemerkt, durch eine Gerade theilen, so hat man die Momente der Druckelemente noch in Bezug auf eine zweite Axe zu bestimmen, welche erstere unter einem (rechten) Winkel schneidet und gleichfalls in der Ebene der gedrückten Wand liegt u. s. w.

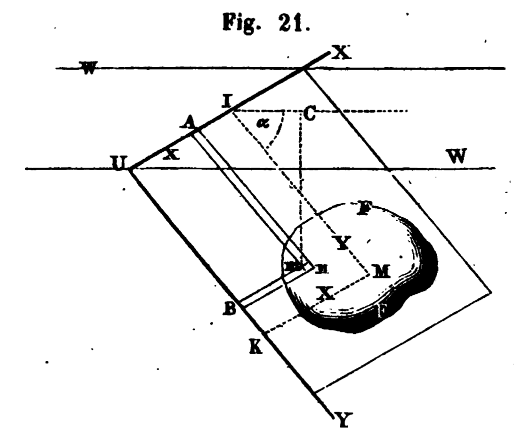
Um endlich den Mittelpunct des Druckes für ein krummes Wandstück zu bestimmen, hat man nach §. 30 Geostatik die Normaldrücke auf die Elemente der krummen Fläche in Seitenkräfte zu zerlegen und die entsprechenden Resultirenden aufzusuchen.

Diese ihrer Lage und Größe nach so bestimmten Resultirenden lassen sich jedoch nur unter besonderen Umständen zu einer einzigen Resultante vereinigen; ist daher Letzteres nicht der Fall, so kann natürlich von einem Mittelpuncte des Druckes im obigen Sinne nicht die Rede sein. Zu den bemerkten Fällen, wo eine einzige Mittelkraft möglich ist, gehört namentlich der, wenn die gedrückte Wand die Flüssigkeit überall umgiebt, wie später gezeigt werden wird.

§. 23.

Mit Bezug auf den vorigen §. werde nun der Mittelpunct des Druckes für eine ebene Fläche FF', Fig. 21, bestimmt, die ganz unter dem Wasserspiegel liegt und gegen den Horizont unter einem Winkel α geneigt ist. Die Gerade UX sei die

Fig. 21.



Durchschnittslinie der Ebene der Fläche FF' mit dem Wasserspiegel WW und zugleich die Abscissenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, dessen Ordinatenaxe UY in der Ebene von FF' liegt. Die Coordinaten eines beliebigen aber unendlich kleinen Flächenelementes mn, dessen Inhalt $= \lambda$ sein mag, bezeichnen wir mit $x (= UA = Bm)$ und $y (= UB = Am)$ und erhalten sonach, weil die Druckhöhe $mC = y \sin \alpha$ ist, den Normaldruck des Wassers auf mn: $\gamma \lambda y \sin \alpha$ und die Summe aller dieser Drücke $= \gamma \sin \alpha \, \Sigma(\lambda y) = \gamma . P \sin \alpha$, wenn $\Sigma(\lambda y) = P$ gesetzt wird. Die statischen Momente dieses Druckes in Bezug auf die Axen UX und UY ergeben sich daher ohne Weiteres respective zu $\gamma \sin \alpha \, \Sigma(\lambda y^2)$ und $\gamma \sin \alpha \, \Sigma(\lambda xy)$. Setzt man daher die Coordinaten des Druckmittelpunctes $IM = Y$, $KM = X$, so folgt nach dem bekannten Satze, daß das statische Moment des Ganzen gleich der Summe der statischen Momente der Theile sein muß:

$$Y . \gamma P \sin \alpha = \gamma \sin \alpha \, \Sigma(\lambda y^2) \text{ und}$$

$$X \gamma P \sin \alpha = \gamma \sin \alpha \, \Sigma(\lambda xy), \text{ d. i.}$$

$$\text{I. } Y = \frac{\Sigma(\lambda y^2)}{P} \text{ und II. } X = \frac{\Sigma(\lambda xy)}{P}.$$

Der Zähler des ersten Ausdruckes ist aber nichts anders als das Trägheitsmoment der gedrückten Fläche in Bezug auf eine Axe, welche in ihrer Ebene und zugleich im Oberwasserspiegel liegt, so wie im zweiten Ausdrucke der Zähler das Centrifugalmoment (§. 59 Geodynamik) derselben Fläche auf dieselbe Axe bezogen bezeichnet. Zugleich folgt hieraus [mit Bezug auf §. 69 Geodynamik (Zusatz) III und IV], daß der Mittelpunct des Wasserdruckes für eine ebene Fläche nichts anderes als der Mittelpunct des Stoßes ist, wenn man die Abscissenaxe UX als Drehaxe der Fläche FF' betrachtet.

Für eine Fläche, die in einer zur Ordinatenaxe UY symmetrische Lage gebracht werden kann, wird $\Sigma\lambda xy$ gleich Null, weil dann jedem $+ x$ auf der einen Seite dieser Axe ein $- x$ auf der andern entspricht. Man erhält daher, wenn überdies das Trägheitsmoment der Fläche in Bezug auf die Axe UX mit T bezeichnet wird:

$$\text{III.} \quad Y = \frac{T}{P},$$

in diesem Falle findet man also den Mittelpunct des Druckes, indem man das Trägheitsmoment der gedrückten Fläche durch das statische Moment der Fläche dividirt, beide Momente auf dieselbe Axe bezogen, welche in der Ebene der Fläche und im Wasserspiegel liegt.

Der so bestimmte Druckmittelpunct fällt daher (nach §. 54 Geodynamik) auch mit dem Schwingungspuncte der Fläche zusammen, wenn UX abermals die Drehaxe bildet.

Fig. 22.

Zusatz 1. Für ein vertical stehendes Rechteck $ABCD$, Fig. 21, dessen obere Kante $BC = b$ mit dem Wasserspiegel WW zusammenfällt und dessen Höhe $= h$ ist, erhält man daher, wegen $T = \frac{1}{3} bh^3$ (nach §. 110 Geostatik) und $P = \frac{bh^2}{2}$ sofort:

$$Y = \frac{\frac{1}{3} bh^3}{\frac{1}{2} bh^2} = \frac{2}{3} h.$$

Steht dagegen die obere Kante um e vom Oberwasserspiegel ab, d. h. bildet $W'W'$ den Wasserspiegel, so ist nach §. 113 Geostatik

$$T = \frac{1}{12} bh^3 + bh\left(e + \frac{h}{2}\right)^2, \text{ so wie}$$

$$P = bh\left(e + \frac{h}{2}\right), \text{ daher}$$

$$Y = \frac{e^2 + eh + \frac{1}{3} h^2}{e + \frac{h}{2}}.$$

Für eine vertical stehende Kreisfläche vom Halbmesser $= r$, deren höchster Punct um e unterm Wasserspiegel liegt, ist ähnlich wie vorher:

$$T = \tfrac{1}{4}\pi r^4 + r^2\pi(r+e)^2$$
$$P = \pi r^2(r+e), \text{ folglich}$$
$$Y = \frac{r^2 + 4(r+e)^2}{4(r+e)}.$$

Fällt der höchste Punct der Kreisfläche mit dem Wasserspiegel zusammen, so wird e = Null und $Y = \frac{5}{4}r$.

[§. 24.]

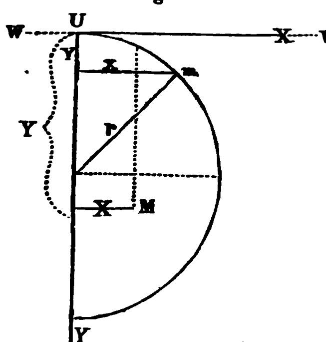
Für nicht symmetrische Flächen läßt sich genau genommen der Mittelpunct des Druckes nur mit Hülfe der Differential- und Integralrechnung bestimmen, was in diesem §. gezeigt werden soll.

Die Formeln I und II geben, in die Sprache der genannten Rechnung übersetzt, sofort:

$$Y = \frac{\int y^2 dx dy}{\int y\, dx\, dy};\quad X = \frac{\int xy dx dy}{\int y dx dy}.$$

Mittelst derselben mögen folgende specielle Fälle behandelt werden:

Fig. 23.

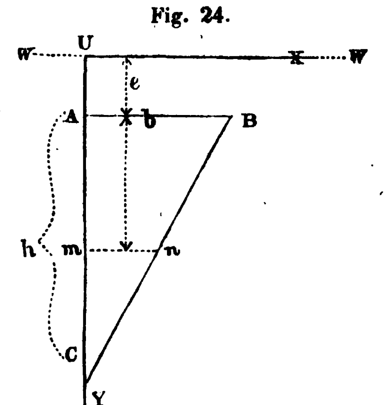


(1) Mittelpunkt des Druckes eines Halbkreises von Radius $= r$, Fig. 23, dessen verticaler Durchmesser mit der Vertical-Axe UY, und der Coordinatenursprung im Endpunkte des Durchmesser mit dem Wasserspiegel WW zusammenfallen mag. Für einen Punct m der Kreisperipherie hat man bekanntlich $x^2 = 2ry - y^2$, folglich:

$$Y = \frac{\int_0^{2r} y^2 dy \int_0^{\sqrt{2ry-y^2}} dx}{\int_0^{2r} y dy \int_0^{\sqrt{2ry-y^2}} dx} = \frac{\frac{5}{8}r^4\pi}{\frac{1}{2}r^3\pi} = \frac{5}{4}r;\ ^{*})$$

$$X = \frac{\int_0^{2r} y dy \int_0^{\sqrt{2ry-y^2}} x dx}{\int_0^{2r} y dy \int_0^{\sqrt{2ry-y^2}} dx} = \frac{\frac{2}{3}r^4}{\frac{1}{2}r^3\pi} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Fig. 24.



(2) **Mittelpunct des Druckes für ein ebenes Dreieck ABC, Fig. 24, dessen eine Cathete $AC = h$ vertical liegt, mit der Ordinatenaxe UY zusammenfällt, während die andere Cathete $AB = b$ um e vom Oberwasserspiegel absteht.**

Zuerst erhält man hier für die Breite mn in dem beliebigen Abstande $Um = y$:

$mn = \frac{b}{h}(h + e - y)$ und sodann:

$$Y = \frac{\int_e^{e+h} y^2 dy \int_0^{\frac{b}{h}(h+e-y)} dx}{\int_e^{e+h} y dy \int_0^{\frac{b}{h}(h+e-y)} dx} = \frac{h^2 + 4he + 6e^2}{2h + 6e};$$

$$X = \frac{\int_e^{e+h} y dy \int_0^{\frac{b}{h}(h+e-y)} x dx}{\int_e^{e+h} y dy \int_0^{\frac{b}{h}(h+e-y)} dx} = \frac{b}{4} \cdot \frac{h + 4e}{h + 3e}.$$

---

*) $\int dz \sqrt{2az - z^2} = -\frac{1}{2}(a - z)\sqrt{2az - z^2} + \frac{1}{2}a^2 \text{arc sin vers.}\left(\frac{z}{a}\right) + C$

$$= -\frac{1}{2}(a - z)\sqrt{2az - z^2} + a^2 \text{ arc sin} \sqrt{\frac{z}{2a}} + C$$

$\int z dz \sqrt{2az - z^2} = -\frac{1}{3}\sqrt{(2az - z^2)^3} + a \int dz \sqrt{2az - z^2},$

$\int z^2 dz \sqrt{2az - z^2} = -\frac{5a + 3z}{12}\sqrt{(2az - z^2)^3} + \frac{5a^2}{4}\int dz \sqrt{2az - z^2}.$

Für e = Null wird $Y = \frac{1}{2} h$ und $X = \frac{1}{4} b$. Genau dieselben Werthe, welche §. 70 der Geodynamik (Beispiel 2) für den Mittelpunct des Stoßes einer Dreieckfläche gefunden wurden.

§. 25.

Zur Anwendung der Lehre vom Mittelpuncte des Druckes folgen hier noch einige practische Aufgaben.

Aufgabe 1. Zur Abführung des Wassers aus dem Speisebassin des von Telford erbauten Birmingham und Warwick Canales *) dient eine 18 Zoll weite Röhrenleitung A, Fig. 25,

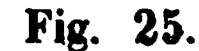
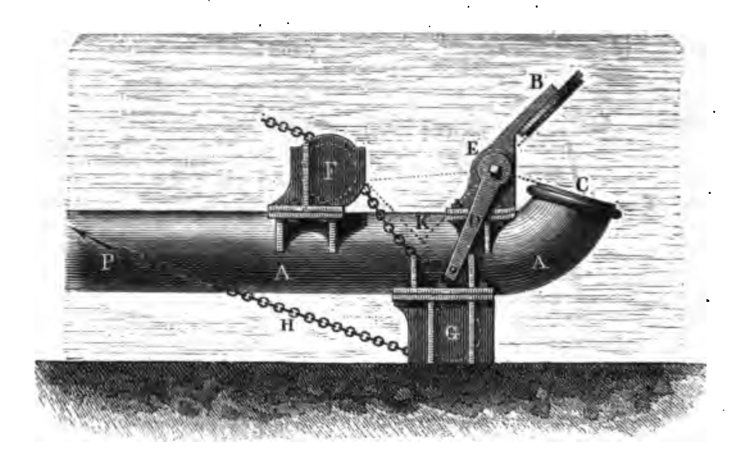


Fig. 25.



(welche horizontal durch den Bassin-Damm geht), die an der Eintrittsstelle C durch eine kreisförmige Scheibe B geschlossen und geöffnet werden kann. Für den Zweck dieser Bewegung ist die Scheibe mit einem Arme D derartig verbunden, daß überhaupt eine um E als Axe drehbare Hebelanordnung gebildet wird. Ueber feste Rollen F und G geleitete Ketten dienen respective zum Schließen und Oeffnen der Klappe B etc., welche Ketten der drei füßigen (Höhe zur Anlage = 1 : 3) Dammböschung parallel bis zur Dammkrone geführt sind, sich dort auf die Trommel einer mit Räderwerk versehenen Aufzugsmaschine (Winde) wickeln etc.

Es soll die Zugkraft = P in der Kette K für den Anfang der Bewegung der als geschlossen gedachten Klappe, mit Nicht-

*) Life of Telford, p. 80, Plate 29 und Hagen Wasserbau II. Theil, 3. Bd., S. 576.

beachtung aller Reibungen, bestimmt werden, wenn man weiß, daß die Druckhöhe für den Schwerpunct der kreisförmigen Klappe 43 Fuß englisch, der Radius der Kreisscheibe $B = 11\frac{1}{2}$ Zoll der Neigungswinkel der Klappe gegen den Horizont (parallel der Dammböschung) $18^\circ\ 26'$ ($\frac{1}{3} = tg\,18^\circ\ 26'$), der Hebelarm der Zugkraft = 22 Zoll, die Entfernung EB des Hebeldrehpunctes von der Klappenmitte = 19 Zoll beträgt und ein Cubikfuß (engl.) Wasser = 62,5 ℔ gerechnet wird.

Auflösung. Es sei allgemein r der Radius des Klappenkreises, L die Entfernung des Mittelpunctes vom Wasserspiegel, in der Dammböschungsrichtung gemessen und Y die Entfernung des Druckmittelpunctes in Bezug auf die Gerade der Axe, wo der Ober-Wasserspiegel die Dammböschung berührt.

Sodann ist nach §. 20:

$$Y = \frac{\frac{1}{4} r^4 \pi + r^2 \pi L^2}{r^2 \pi L} = \frac{r^2}{4L} + L, \text{ d. i.}$$

wegen $tg\varphi = \frac{1}{3}$ und $L = \frac{43'}{\sin\varphi} = 135',978$ engl., $r = 11'',5$:

$$Y = 0',0017 + 135',978 = 135',9797.$$

Ferner ist der Wasserdruck auf die Klappe:

$$\left(\frac{11,5}{12}\right)^2 \pi \,.\, 43 \,.\, 62,5 = 7754,104 \text{ ℔}.$$

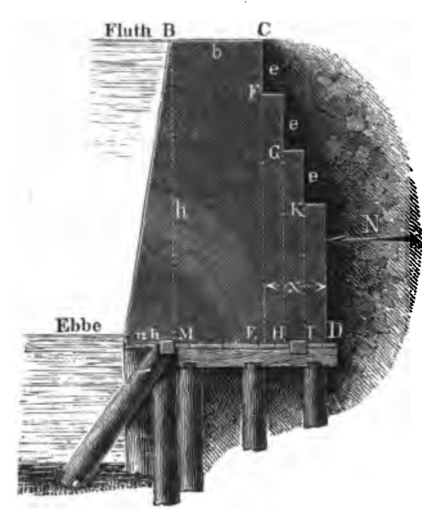
Der Hebelarm dieses Druckes: $19'' + 0',0017 = 19'' + 0'',0203$
$= 19,0203$ Zoll,

– – der Zugkraft = $22''$, sonach endlich:

$$P = \frac{19,0203 \,.\, 7754.104 \text{ ℔}}{22} = 6703,9 \text{ ℔}.$$

Aufgabe 2. An einem Fluth und Ebbe haltenden Strome wird die Anlegung einer Kaimauer, Fig. 26, beabsichtigt, welche auf einen Pfahlrost zu gründen ist und eine obere Breite $b = 4'\,3''$ und eine gegen die Wasserseite frei stehende Höhe $h = 17'\,4''$ erhalten soll. Die Anlage AM der Vorderfläche sei $nh = 1'\,6''$ festgesetzt und von der Krone ab nach unten drei Bankets jedes von $e = 3'$ Höhe und gleicher Breite $= \frac{x}{3}$ angeordnet. Man soll die Dicke $ED = x$ der hinteren Maueranlage unter der Voraussetzung berechnen, daß das Erdreich N, was gegen

Fig. 26.



die Mauer drückt, gleiche Dichte mit dem Wasser habe, das Mauerwerk eine Dichte $= q$ besitze und der Druck der Masse N eine Drehung der Mauer um die Kante A zu bewirken strebt. Endlich werde $\gamma = 53{,}2$ ℔ (hannov.) gesetzt und $q = 2\gamma$. *)

Auflösung. Nach §. 20 ist das Moment des Wasserdruckes in Bezug auf die Kante A, wenn die auf der Bildfläche normale Mauerdimension $= 1$ gesetzt wird: $\gamma h \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3} = \frac{\gamma h^3}{6}$, od. wenn m eine Sicherheitscoefficienten $m > 1$ bezeichnet: $\frac{m\gamma h^3}{6}$.

Setzt man diesen Werth der Summe der statischen Momente der sämmtlichen Mauertheile, einschließlich des auf die Bankets kommenden Flüssigkeitsdruck gleich, so erhält man die Bedingungsgleichung für's Gleichgewicht, aus welcher x zu reduciren ist. Mit Zuziehung von §. 67 Geostatik folgt hiernach:

$$\text{I.}\quad \frac{m\gamma h^3}{6} = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3} q n^2 h^3 \\ + qbh(nh + \frac{1}{2} b) \\ + \left[\frac{qx}{3}(h-e) + \frac{\gamma e x}{3}\right]\left(nh + b + \frac{x}{6}\right) \\ + \left[\frac{qx}{3}(h-2e) + \frac{2\gamma e x}{3}\right]\left(nh + b + \frac{3x}{6}\right) \\ + \left[\frac{qx}{3}(h-3e) + \frac{3\gamma e x}{3}\right]\left(nh + b + \frac{5x}{6}\right) \end{array}\right\}$$

Für eine Mauer, wo die innere Seite CD vertical, also $x =$ Null ist, kann man b als unbekannt voraussetzen, so daß man erhält:

---

*) Durch ein Versehen hat der Zeichner in Fig. 26 die Spundwand, in verticaler Richtung unter M, anzugeben vergessen.

$$\frac{q}{3} n^2 h^3 + qbh(nh + \tfrac{1}{2}.b) = \frac{m}{6} \gamma h^3$$ und hieraus

$$\text{II.} \quad b = h\left(-n + \sqrt{\tfrac{2}{3} n^2 + \frac{m\gamma}{3q}}\right).$$

Endlich, wenn auch die Vorderfläche ungeböscht, also noch n = Null ist:

$$\text{III.} \quad b = h\sqrt{\frac{m\gamma}{3q}}.$$

Für's mathematische Gleichgewicht, d. h. wenn $m = 1$ ist und überdies $q = 2\gamma$ folgt:

$$\text{IV.} \quad b = 0{,}408 \,.\, h,$$

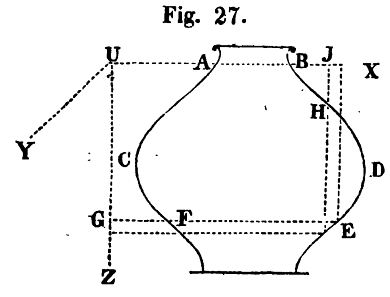
woraus sich die practische Regel erklärt, derartige Mauern halb so dick zu machen als der hinter ihnen befindliche Wasserstand beträgt. Für obige Zahlenwerthe wird $x = 2{,}799$ wenn $m = 1$ und $x = 4{,}287$ Fuß für $m = \frac{3}{2}$. Der ausführende Ingenieur hat (Geestehafenbau) $x = 3{,}33$ Fuß genommen.

Die Formel IV erklärt die Angabe Minard's (Navigation des rivières Chap. XIV. p. 170), daß er $b = 0{,}4h$ bei ungefähr 400 Schleußen als Mittelwerth gefunden habe.

§. 26.

Mittelkraft aus den Druckkräften, wenn die gedrückte Fläche die Flüssigkeit von allen Seiten umgiebt.

Fig. 27.



Es sei $ABCD$, Fig. 27, ein ganz beliebig gestaltetes Gefäß, welches bis AB mit Wasser gefüllt ist. E sei ein Element der Wandfläche, ω der Flächeninhalt desselben, und die zugehörige Druckhöhe $JE = z$. Der Normaldruck gegen dieses Element werde wie in §. 22 in Seitenkräfte zerlegt, welche den drei Axen eines rechtwinkeligen Coordinatensystemes parallel sind, und wovon die UX und UY in der Ebene des Wasserspiegels liegen mögen, UZ also mit der Schwerkraftsrichtung zusammenfällt. Bezeichnet man sodann die Projection des Elementes ω gegen die Ebenen YZ, XZ und XY mit a, b und c, so erhält man, nach §. 18 für die horizontalen Seitenkräfte γaz und γbz, für die verticalen γcz,

Um nun zunächst die Mittelkraft der Horizontalkräfte anzugeben, werde das horizontale Prisma GE betrachtet und das

Element E auf die Ebene YZ projicirt. Dies Prisma schneidet auf der Gefäßwand bei F nothwendig ein Element ab, dessen Projection auf die Ebene YZ dieselbe Größe wie die Projection des Elementes E, auch dieselbe Druckhöhe wie letzteres hat, so daß beide Elemente einerlei Druck $= \gamma az$ in horizontaler Richtung nach Außen erfahren. Die Richtungen dieser beiden Drücke wirken aber in derselben Geraden einander genau entgegen, heben sich daher völlig auf und tragen Nichts zur Bildung der respectiven Mittelkraft bei. Leicht erkennt man aber, daß dasselbe nicht nur von allen übrigen Drücken, die UX parallel gerichtet sind, nachgewiesen werden kann, sondern auch von jenen, welche UY parallel sind. Ueberhaupt folgt daher der Satz:

Alle Drücke, welche das Wasser auf die verschiedenen Theile der Seitenwand eines Gefäßes nach horizontalen Richtungen ausübt, heben sich gegenseitig auf, oder das ganze Gefäß wird vom Wasser nach horizontalen Richtungen gleich stark gedrückt.

Wie daher auch die Form des Gefäßes sein mag, welches die Flüssigkeit überall umgiebt, so wird doch durch letztere dem Gefäße kein Bestreben zu irgend einer horizontalen Bewegung ertheilt. Vorausgesetzt ist natürlich hierbei, daß die Festigkeit der Gefäßwände hinreicht, sämmtliche Horizontaldrücke zu vernichten.

Bringt man dagegen an irgend einer Stelle der Wand eine Oeffnung an, so wird der Druck an der gegenüber liegenden Stelle nicht mehr aufgehoben, und das Gefäß wird sich bestreben, eine horizontal gerichtete Bewegung anzunehmen. Hierauf beruht unter Anderem die Wirkung einer besonderen Art von Wasserrädern, die man deßhalb Reactionsräder genannt hat.

Zur Bestimmung der fraglichen Mittelkraft bleiben daher die verticalen Seitenkräfte allein übrig. Hierzu werde das ververticale Prisma EHJ betrachtet und das Element E auf die Ebene XY projicirt gedacht. Das Prisma schneidet auf der Gefäßwand, oberhalb, ein zweites Element H ab, welches auf XY gleiche Projection wie E, aber nicht dieselbe Druckhöhe hat. Bezeichnet man letztere, d. i. HJ, mit z', so ist der vertical aufwärts gerichtete Druck gegen das Element $H = \gamma cz'$. Diesem Drucke wirkt aber der gegen E, d. i. γcz, genau entgegen, so daß wegen $z > z'$, als verticale Seitenkraft für die zu bildende Mittelkraft: $\gamma c(z - z')$, das Gewicht eines Wasserprismas verbleibt, welches c zur Grundfläche und $z - z'$ zur Höhe hat. Ueberhaupt wird also hiernach die zu suchende Mittelkraft aus der Summe der Gewichte so vieler ähnlicher Prismen wie EH bestehen, als man solche innerhalb des Gefäßes gebildet denken

kann; diejenigen Prismen, deren obere Endfläche in den Wasserspiegel fällt, können an dem vorhergehenden Resultate Nichts ändern.

Aus Allem ergiebt sich aber,

daß die Mittelkraft aus allen Druckkräften einer Flüssigkeit, welche vom Gefäße überall umgeben wird, und wobei letzteres gehörigen Widerstand leistet, dem Gewichte der Flüssigkeit gleich ist; oder die Kraft, womit ein Gefäß vom darin befindlichen Wasser vertical abwärts getrieben wird, ist dem Gewichte des darin enthaltenen Wassers gleich.

Da man alle Seitenkräfte, die zur Bildung dieser Mittelkraft beitragen, unmittelbar als Gewichte betrachten kann, so muß die Richtung der Mittelkraft durch den Schwerpunct des flüssigen Körpers gehen.

Drittes Kapitel.

Gleichgewicht des Wassers mit eingetauchten festen Körpern.

§. 27.

Druck des Wassers gegen eingetauchte Körper.

Aus einer einfachen Betrachtung wird zu entnehmen sein, daß sich der Druck, welchen ein in eine Flüssigkeit getauchter fester (freier) Körper überhaupt erfährt, ganz auf dieselbe Weise auffinden lassen muß, wie in §. 26 der Druck gegen eine die Flüssigkeit überall umgebende Fläche.

Die hier nach entsprechender Zerlegung erhaltenen Seitenkräfte unterscheiden sich von den an gedachtem Orte nur durch die relativen Zeichen, indem jetzt die Horizontalkräfte von Außen nach Innen gerichtet, die Verticalkräfte gegen die oberen (dem Wasserspiegel zugekehrten) Elemente abwärts und die Verticalkräfte gegen die unteren (entgegengesetzten) Elemente aufwärts gerichtet sind.

Verfährt man sodann wie in gedachtem §., so ergeben sich für jeden ganz oder zum Theil in eine Flüssigkeit getauchten Körper leicht folgende Sätze:

Die horizontalen Druckkräfte heben sich auf, oder die ruhige Flüssigkeit drückt den festen

Körper nach allen Horizontalrichtungen gleich stark.

Die Mittelkraft aus allen Druckkräften wirkt vertical aufwärts, ist gleich dem Gewichte der Flüssigkeit, welche den Körper aus der von ihm eingenommenen Stelle verdrängt, und ihre Richtung geht durch den Schwerpunct der verdrängten Flüssigkeit.

Letzteren Satz drückt man gewöhnlich auch so aus, daß man sagt:

»Ein in eine Flüssigkeit eingetauchter Körper verliert so viel an seinem Gewichte, als das Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeit beträgt.«

Den vertical aufwärts gerichteten Druck des Wassers nennt man den hydrostatischen Auftrieb. Vorstehendes gilt übrigens sowohl für gleich dichte Flüssigkeiten, als auch für solche, welche aus horizontalen Schichten von verschiedener Dichte bestehen.

Von diesen Sätzen macht man unter Anderem auch Anwendung bei der Bestimmung des specifischen (eigenthümlichen) Gewichtes eines Körpers, worunter man die (unbenannte) Zahl versteht, welche angiebt, wie viel Mal ein Körper mehr wiegt, als eine Masse Wasser, welche mit ihm gleiches Volumen hat.

Bezeichnet daher P das absolute, s das specifische Gewicht eines beliebigen gleichartigen Körpers vom Volumen $= V$, ferner p das absolute Gewicht eines gleich großen Wasserkörpers, so ist

$$s = \frac{P}{p}, \text{ oder da auch } p = \gamma V \text{ sein muß:}$$

$$s = \frac{P}{\gamma V}, \quad P = \gamma s . V \text{ etc.}$$

§. 28.

Gleichgewicht schwimmender Körper.

Nach dem Vorstehenden läßt sich angeben, ob ein ganz unter das Wasser getauchter Körper an einer ihm gegebenen Stelle fortdauernd verbleiben, ob er untersinken oder sich ganz oder zum Theil über den Wasserspiegel erheben wird. Dem hydrostatischen Auftriebe wirkt nämlich das in allen Fällen gleichbleibende Gewicht des Körpers selbst entgegen. Ist daher das Gewicht des Körpers eben so groß, als das der von ihm verdrängten Flüssigkeit, so wird er weder ein Bestreben zum Sinken, noch zum Steigen zeigen. Ist das Gewicht des Körpers größer, so wird er in der Flüssigkeit untersinken. Beträgt aber das Gewicht des Körpers weniger, so wird er in die Höhe steigen, und zwar so lange, bis nur noch ein solcher Theil

desselben in die Flüssigkeit taucht, daß das Gewicht des ganzen Körpers dem Gewichte der Wassermasse gleich ist, die er sodann noch verdrängt. In letzterem Falle sagt man von dem Körper, daß er schwimme.

Damit sich jedoch ein auf einer ruhigen Flüssigkeit schwimmender Körper vollständig im Gleichgewicht befinde, ist, außer der Bedingung, daß das Gewicht des Körpers dem der verdrängten Flüssigkeit gleich sei, noch eine andere zu erfüllen nöthig, nämlich die, daß der Schwerpunct des schwimmenden Körpers mit dem Schwerpuncte der verdrängten Flüssigkeit in derselben Verticallinie liege. Ist sowohl der schwimmende Körper als die Flüssigkeit gleichartig, so liegt im vollständigen Gleichgewichtszustande der Schwerpunct der verdrängten Flüssigkeit mit dem des eingetauchten Körpertheiles in einem und demselben Puncte.

Eine noch vollständigere Erledigung finden vorstehende Auseinandersetzungen durch folgende mathematische Betrachtung.

Fig. 28.

Es sei S, Fig. 28, der Schwerpunct eines ganz unter den Wasserspiegel $W' W'$ getauchten Körpers vom absoluten Gewichte gleich W und v das Volumen der verdrängten Flüssigkeit, also γv der hydrostatische Auftrieb, dessen Angriffspunct im Schwerpuncte M der verdrängten Flüssigkeit liegt.

Nach §. 25 Geostatik und §. 67 (Zusatz) Geodynamik lassen sich aber die beiden hier auftretenden Kräfte, W vertical abwärts und γv vertical aufwärts wirkend zusammensetzen in eine Einzelkraft $W - \gamma v$ oder $\gamma v - W$ und in ein Kräftepaar von der Breite $\overline{MS}$, welches sich bestrebt, den Körper in der Richtung SMN oder in der NMS mit einer Energie um den Schwerpunct S zu drehen, deren Größe $\gamma v \, . \, \overline{MS}$ ist.

Für's vollständige Gleichgewicht muß daher letzteres Moment gleich Null sein, d. h. die beiden gedachten Schwerpuncte müssen in derselben Verticalen liegen und überdies die Gleichung stattfinden:

$$\text{I.} \quad \gamma v = W$$

oder, wenn V das Volumen von W und s sein specifisches Gewicht bezeichnet, also $W = \gamma s V$ ist:

$$\text{II.} \quad v = s . V.$$

Zusatz 1. Die oben erhaltene Einzelkraft $+ (\gamma v - W)$ giebt noch zu folgenden Schlüssen Veranlassung. Setzen wir gedachten Werth $= R$ und $W = \gamma s V$, so ergiebt sich $R = \gamma(v - sV)$. Ist nun anfänglich $v = V$, d. h. der eingetauchte Körper überall vom Wasser umgeben, so folgt

$$\text{III.} \quad R = \gamma v (1 - s) = \left(\frac{W}{s} - W\right).$$

Es wird also der Körper, wenn

$1 > s$ aufwärts steigen, wenn

$1 < s$ zu Boden sinken und endlich wenn

$1 = s$ in jeder Lage unterm Wasser verharren.

Im ersteren Falle dauert die aufwärts gerichtete Bewegung so lange bis v wiederum eine solche Größe erlangt hat, daß $R =$ Null ist und die Gleichungen II. und I. stattfinden.

Zusatz 2. Die Verbindungslinie beider vorgenannten Schwerpuncte nennt man die Schwimmaxe, die horizontale Oberfläche der Flüssigkeit, in welcher der Körper schwimmt, die Schwimmebene. Man sagt, der Körper schwimmt in aufrechter Stellung, wenn es wenigstens eine durch seine Schwimmaxe zu legende (verticale) Ebene giebt, die den Körper in zwei symmetrische Theile theilt; im entgegengesetzten Falle sagt man, der Körper schwimmt in schiefer Stellung. Ferner sagt man, ein Körper schwimme mit Stabilität oder im steten Gleichgewichte, wenn er, aus seiner Gleichgewichtslage gebracht, von selbst ein Bestreben besitzt, in diese Lage wieder zurückzukehren; mit Instabilität im unsteten Gleichgewichte, wenn er sich, statt, wie bemerkt, zurückzukehren, immer mehr von der ersten Lage entfernt; endlich ohne Stabilität, wenn er, aus seiner ursprünglichen Lage gebracht, gar kein Bestreben zu irgend einer Bewegung zeigt.

Beispiel. Welchen Auftrieb erfährt ein ganz ins Wasser getauchtes Stück Tannenholz von 40 ℔ Gewicht, mit welcher resultirenden Kraft erfolgt das Aufwärtssteigen und wie viel Cubikfuß Wasser werden von demselben aus der Stelle gedrängt, wenn es zur Ruhe gelangt ist und an der Oberfläche schwimmt.

Auflösung. Nimmt man das specifische Gewicht des Tannenholzes zu 0,6 an, so ergiebt sich zunächst nach III:

$$R = \frac{40}{0{,}6} - 40 = 26\tfrac{2}{3}\ ℔,$$

ferner der Auftrieb zu $R + 40 = 66\tfrac{2}{3}$ ℔.

Ferner ist $\gamma s v = 40$, also wenn $\gamma = 53{,}2$ ℔ (hannoversch),

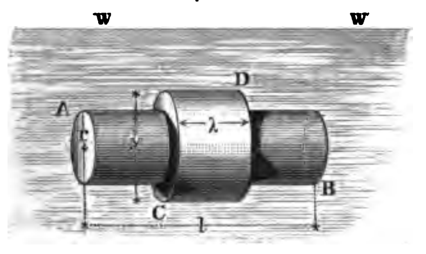
$$v = \frac{40}{31{,}92} = 1{,}253 \text{ Cubikfuß}.$$

§. 29.

Vom hydrostatischen Auftriebe macht man sehr oft Gebrauch, um Lasten aus dem Wasser zu heben, eingerammte Pfähle aus dem Grunde zu ziehen etc., worüber man nachlesen kann in Hagen Wasserbaukunst, 1r Theil, 2. Auflage, S. 683.

Auch wenn specifisch leichtere Körper als das Wasser mit specifisch schwereren verbunden werden, können letztere bis zur Oberfläche des Wassers ohne besondere Kraftanwendung erhoben werden, sobald man nur eine derartige Anwendung trifft, daß der Auftrieb des Wassers dem absoluten Gewichte der festen Körperverbindung das Gleichgewicht hält.

Fig. 29.



Beispielsweise sei in Fig. 29 ein kupferner Cylinder AB mit kreisförmiger Basis vom Halbmesser $= r$ und der Länge $= l$ mit einem Korkringe CD von der Länge λ in der Weise zu umgeben, daß die Verbindung in jeder Lage unterm Wasserspiegel im (indifferenten) Gleichgewichte verharrt. Wie groß wird man den Durchmesser y des Korkringes zu nehmen haben, wenn das specifische Gewicht dieses Materials $= s'$ das des Kupfers $= s$ gesetzt wird.

Mit Zuziehung bekannter Sätze der Geometrie erhält man sofort, wenn die Bezeichnungen der letzteren §§. beibehalten werden:

$$v = \left[r^2\pi l + \left(\frac{y^2\pi}{4} - r^2\pi \right) \lambda \right] \text{ und}$$

$$W = \gamma s r^2 \pi l + \gamma s' \left(\frac{y^2\pi}{4} - r^2\pi \right) \lambda.$$

Hieraus für's Gleichgewicht nach I. §. 28:

$$r^2\pi l + \left(\frac{y^2\pi}{4} - r^2\pi \right) \lambda = s r^2 \pi l + s' \lambda \left(\frac{y^2\pi}{4} - r^2\pi \right),$$

so wie nach gehöriger Reduction:

$$y = 2r\sqrt{\frac{l}{\lambda}\,\frac{s-1}{1-s_1}+1}$$

Für $r = 4''$, $\lambda = q''$, $l = 24''$, $s = 8{,}8$ und $s_1 = 0{,}24$, findet man $y = 42{,}64''$. Die Dicke des Korkringes muß folglich betragen: $\frac{42{,}64-8}{2} = 17{,}32$ Zoll.

§. 30.

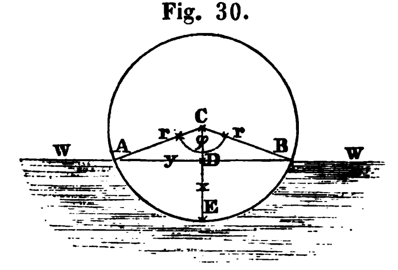
Tiefe der Einsenkung schwimmender (symmetrischer) Körper.

Ist der schwimmende Körper in Bezug auf irgend eine durch ihn gelegte Axe symmetrisch, d. h. ist er so gestaltet, daß für jede Ebene, welche durch ihn rechtwinkelig zu gedachter Axe geführt wird, der Schwerpunct der Schnittfläche in dieser Axe liegt, und senkt man ihn so in die Flüssigkeit, daß bemerkte Axe vertical gerichtet ist, so wird der Schwerpunct des ganzen Körpers und der seines eingetauchten Theiles in dieser Axe liegen, nnd die Bedingung des Gleichgewichtes in Bezug auf Drehung wird von selbst erfüllt sein, wie tief auch der Körper eintauchen mag. Die Größe der Eintauchungstiefe wird aber aus einer Gleichung des §. 28 zu reduciren sein.

Zur weiteren Kenntnißnahme dieses für den Techniker besonders wichtigen Gegenstandes folgt von hier ab eine Reihe entsprechender Aufgaben und Beispiele.

Aufgabe 1. Es ist die Eintauchungstiefe eines Cylinders, Fig. 30, mit kreisförmigem Querschnitt vom Radius $= r$ und der Länge $= l$ zu bestimmen, wenn seine geometrische Axe dem Wasserspiegel parallel gerichtet ist.

Fig. 30.



Auflösung. Es sei ADB die Durchschnittslinie der Schwimmebene mit einer Ebene, welche normal und vertical zur Cylinderaxe gerichtet ist, $DE = x$ die zu findende Eintauchungstiefe, so wie φ der zu AEB gehörige Bogen für den Halbmesser $= 1$. Eine directe Auflösung der Aufgabe ist geradezu unmöglich, vielmehr ist erst φ zu finden und sodann x zu berechnen.

Zu diesem Ende beachte man, daß sein muß:

$$v = [\text{Sector } ACBE - \Delta\, ACB]\, l, \text{ d. i.}$$

$$v = \left[\frac{r^2\varphi}{2} - r^2 \sin\tfrac{1}{2}\varphi \cos\tfrac{1}{2}\varphi\right] l, \text{ oder}$$

$$v = \frac{r^2}{2}(\varphi - \sin\varphi)\, l.$$

Ist das specifische Gewicht des Cylinders $= s$ gegeben, so folgt ferner

$$W = \gamma s r^2 \pi . l$$

und daher aus der Vergleichung mit γv: $\varphi - \sin\varphi = \frac{2W}{\gamma r^2 l}$, oder

$$\text{I.} \quad 2s\pi = \varphi - \sin\varphi.$$

Hat man durch diesen Ausdruck φ ermittelt, so erhält man für x ohne Weiteres:

$$\text{II.} \quad x = r(1 - \cos\tfrac{1}{2}\varphi).$$

Beispiel. Ist $s = \frac{3}{2\pi}$, so wird aus I. $3 = \varphi - \sin\varphi$ und demzufolge liegt, wie aus der Tabelle der folgenden Anmerkung erhellt, der Winkel φ zwischen 175 und 180 Graden.

Setzen wir zur näheren Bestimmung $\varphi = 175 + z = \alpha + z$, so wird aus I:

$$3 = (\alpha + z) - \sin(\alpha + z).$$

Reducirt man diese Gleichung auf z und beachtet, daß weil z sehr klein gedacht werden kann, $\sin z = z$ und $\cos z = 1$ zu setzen ist, so folgt (in Bogenmaß):

$$z = \frac{3 - \alpha + \sin\alpha}{1 - \cos\alpha}, \text{ d. i.}$$

$$z = \frac{3 - 3{,}0543 + 0{,}0872}{1 + 0{,}996} = 0{,}0165 \text{ und deßhalb in Graden:}$$

$$\varphi = 175 \text{ Grad } 56 \text{ Minuten } 43 \text{ Secunden.}$$

Endlich ergiebt sich $x = r(1 - \cos 87^\circ\, 58'\, 21{,}5'') = 0{,}9646 . r$.

Anmerkung. Zur Erleichterung der Auflösung betreffender Aufgaben wird nachstehende hier erweiterte Eytelwein'sche*) Tabelle dienen, woraus zugleich erhellt, daß $\frac{2W}{\gamma r^2 l}$ oder $2s\pi$ nie größer als 6,283185 werden können.

---

*) Hydrostatik §. 67.

φ Grade	φ — sin φ	φ Grade	φ — sin φ	φ Grade	φ — sin φ
5	0,000111	125	1,362510	245	5,182365
10	0,000885	130	1,502884	250	5,303016
15	0,002980	135	1,649088	255	5,416516
20	0,007046	140	1,800673	260	5,522664
25	0,013714	145	1,957151	265	5,621318
30	0,023599	150	2,117994	270	5,712389
35	0,037289	155	2,282642	275	5,795850
40	0,055344	160	2,450507	280	5,871730
45	0,078291	165	2,620974	285	5,940114
50	0,106620	170	2,793412	290	6,001147
55	0,140779	175	2,967170	295	6,055029
60	0,181173	180	3,141592	300	6,102013
65	0,228156	185	3,316015	305	6,142406
70	0,282038	190	3,489774	310	6,176565
75	0,343071	195	3,662211	315	6,204894
80	0,411456	200	3,832679	320	6,227841
85	0,487335	205	4,000543	325	6,245896
90	0,570796	210	4,165191	330	6,259587
95	0,661868	215	4,326034	335	6,269471
100	0,760521	220	4,482512	340	6,276140
105	0,866670	225	4,634098	345	6,280205
110	0,980170	230	4,780302	350	6,282300
115	1,100821	235	4,920676	355	6,283074
120	1,228370	240	5,054816	360	6,283185

Zusatz. Die Eintauchungstiefe $= x$ einer schwimmenden Kugel, wenn Fig. 30 den betreffenden größten Kreis darstellt, ergiebt sich aus der Gleichung

$$\frac{4}{3}\pi\gamma s r^3 = \gamma\left(rx^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\pi\,^{*}), \text{ d. i. aus}$$

$$0 = x^3 - 3rx^2 + 4sr^3.$$

Ist die Kugel überdies mit einem Gewichte Q belastet, wie dies bei sogenannten Schwimmern häufig der Fall ist, so ist die Eintauchungstiefe aus der Gleichung zu berechnen:

$$\frac{4}{3}\gamma s r^3\pi + Q = \gamma\pi\left(rx^2 - \frac{1}{3}x^3\right).$$

---

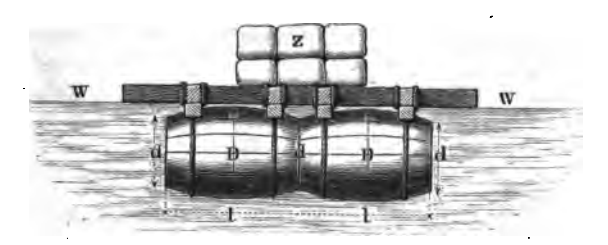
*) Es ist nämlich $v = \int_0^x y^2\pi dx$, oder wegen $y^2 = 2rx - x^2$,

$$v = \pi\int_0^x (2rx - x^2)\,dx = \pi\left(rx^2 - \frac{1}{3}x^3\right).$$

§. 31.

Aufgabe. Aus einer gehörigen Zahl von Tonnen ist Fig. 31 ein auf dem Wasser schwimmendes Floß gebildet, indem

Fig. 31.



man die Tonnen in der Nähe der Böden gekoppelt und durch Seile mit hölzernen Schwellen, Zangen etc. zu einem Ganzen vereinigt hat. Es fragt sich, welche Last $= z$ mit Sicherheit auf ein derartiges Floß gesetzt werden kann, wenn das Gewicht der Tonnen und des sonstigen Holzwerkes etc. $= Q$ ist und die Tonnen, wie in der Figur angegeben, ganz unter das Wasser getaucht sind.

Auflösung. Das Tragvermögen einer (hölzernen) Tonne kann für practische Fälle genau genug gleich dem Wassergewichte gesetzt werden, welches ihr hohler Raum aufnimmt. Bezeichnet daher D die Spundtiefe, d die Bodentiefe und l die Länge einer Tonne, von denen n gleiche vorhanden sind, so ist bei Vernachlässigung des sonst mit eingetauchten Holzwerkes und mit Zuziehung von §. 64 Geostatik zu setzen: $v = \frac{n\pi}{4}\left(\frac{2D+d}{3}\right)^2 l$ und

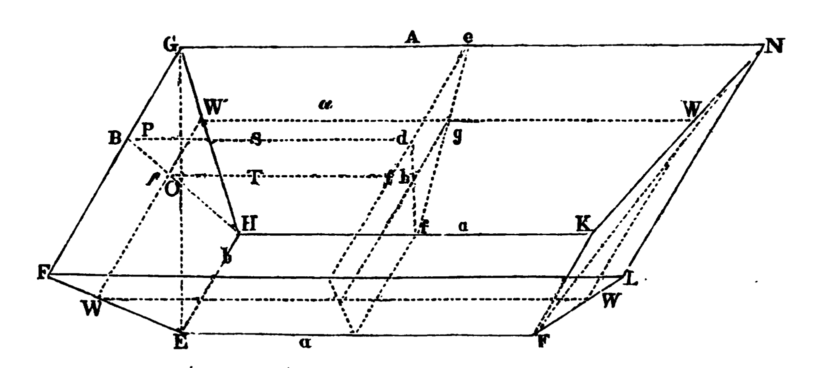
$$Z = \frac{\gamma n\pi}{4}\left(\frac{2D+d}{3}\right)^2 l - Q.$$

Anmerkung. Sind Menschen und Pferde auf ein derartiges Floß zu stellen, so kann man rechnen, daß ein Mann im Gedränge 1,7 □′ Raum bedarf, 140 ℔ wiegt und auf 1 □′ folglich 83 ℔ Belastung kommen. Ein Pferd von 9 Fuß Länge und 3 Fuß Breite aber 27 □′ Raum bedarf, 800 bis 1000 ℔ wiegt und der Quadratfuß mit 30 bis 36 ℔ belastet wird.

§. 32.

Aufgabe. Es ist eine Gleichung zwischen der Eintauchungstiefe eines auf dem Wasser schwimmenden Pontons neben scizzirter Form, Fig. 32, und der Belastung desselben zu entwickeln.

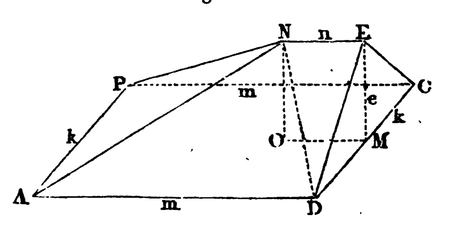
Fig. 32.



Auflösung. Die gegebenen Dimensionen des Pontons mögen folgende sein: die Seiten des obersten Rechteckes FN, nämlich $FL = GN = A$ und $FG = LN = B$, die des unteren EK nämlich $EI = HK = a$ und $EH = IK = b$, die ganze Tiefe $fd = h$. Die Dimensionen des durch die Schwimmebene gebildeten Rechteckes WW' lassen sich aus den vorher gegebenen berechnen und mögen vorläufig α und β genannt werden, während wir die Eintauchungstiefe fh mit x bezeichnen. Nach der untenstehenden Note ist*): Inhalt des Prisma $EGHINK =$

*) Der körperliche Inhalt eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas, Fig. 33, in welche sich unser Ponton zerlegen läßt, besteht aus dem Inhalte einer Pyramide, wovon das Rechteck $ABCD$ Grundfläche und NO Höhe ist, deren Inhalt also beträgt, wenn $AB = DC = k$, $AD = BC = m$ und $NO = EM = e$ gesetzt wird: $mk \cdot \frac{e}{3}$; ferner

Fig. 33.



aus einer zweiten Pyramide, wovon das Dreieck DEC Grundfläche und $NE = n$ die Höhe ist, dessen Inhalt demnach sein muß: $\frac{ke}{2} \cdot \frac{n}{3}$.

Daher der Inhalt beider Pyramiden oder des Prismas: $\frac{mke}{3} + \frac{nke}{6} =$

$\frac{1}{6} ke (2m + n) = \frac{ke}{2} \left(\frac{2m+n}{3}\right)$.

$\frac{1}{2} bh \left(\frac{2a+A}{3}\right)$, ebenso das Prisma $FEGNIL = \frac{Bh}{2}\left(\frac{2A+a}{3}\right)$, folglich der Inhalt $= I$ beider zusammengenommen:

$$I = \frac{h}{6}\left\{b(2a+A) + B(2A+a)\right\}.$$

Das verdrängte Wasservolumen $= v$ ist ein ähnlicher Körper zu letzterem Volumen, und man findet den betreffenden Inhalt, wenn man in dem Ausdrucke für I statt h den Werth x setzt, A mit α und B mit β verwechselt, also erhält:

$$\text{(1)} \quad v = \frac{x}{6}\left\{b(2a+\alpha) + \beta(2\alpha+a)\right\}.$$

Es erübrigt nur noch α und β durch bekannte Dimensionen auszudrücken. Hierzu hat man aber, weil $\Delta\, def \sim \Delta\, fgh$, $hf : fd = hg : de$, d. i. $x : h = \frac{\beta - b}{2} : \frac{B-b}{2}$ und eben so, weil $\Delta\, HQT \sim \Delta\, HPS$, $x : h = \frac{\alpha - a}{2} . \frac{A-a}{2}$. Aus diesen Proportionen folgt

$$\alpha = a + \frac{x(A-a)}{h} \text{ und } \beta = b + \frac{x(B-b)}{h},$$

so wie, wenn diese Werthe in (I) gesetzt werden, nach gehörigem Zusammenziehen und Ordnen:

$$v = \frac{(A-a)(B-b)}{3h^2} x^3 + \left[\frac{b(A-a) + a(B-b)}{2h}\right] x^2 + abx.$$

Ist nun Q ein Pontongewicht, einschließlich der Belastung desselben, so folgt, wegen $Q = v\gamma$:

$$\text{I.} \quad \frac{Q}{\gamma} = \frac{(A-a)(B-b)}{3h^2} x^3 + \left[\frac{b(A-a) + a(B-b)}{2h}\right] x^2 + abx, \text{ sowie}$$

$$\text{II.} \quad x^3 + \tfrac{3}{2} h \left[\frac{b(A-a) + a(B-b)}{(A-a)(B-b)}\right] x^2 + \frac{3abh^2}{(A-a)(B-b)} x - \frac{3h^2 Q}{\gamma(A-a)(B-b)} = 0.$$

B e i s p i e l. Die eisernen Pontons zum Transporte der Röhren der Menai-Brücken *) halten folgende Dimensionen: $A = 98$ Fuß (englisch), $B = 31'$, $a = 93'$, $b = 26'$, $h = 8\frac{3}{4}'$ und die Einsenkung $= x$ betrug, wenn die Pontons mit einer der größten Röhren (472 Fuß Länge) belastet waren, 6 Fuß. Wie groß berechnet sich hiernach die Totalbelastung eines dieser Pontons, wenn $\gamma = 62{,}5$ ℔ engl. gerechnet wird.

*) Clark, The Tubular Bridges, p. 503, 558, 587 etc.

Auflösung. $Q = 984719{,}388$ ℔ $= 439{,}607$ Tons. Die ganze Tragfähigkeit für $x = h$ ergiebt sich ferner zu 1489596,255 ℔ $=$ 665 Tons.

Zusatz. Die sogenannten Fähren auf den meisten deutschen Flüssen bilden Pontons, wobei die langen Seitenwände auf den Böden normal stehen. In diesem Falle wird $B = b$ und statt I. wird

$$\frac{Q}{\gamma} = \frac{b(A-a)}{2h}\,x^2 + abx \text{ oder}$$

$$x^2 + \frac{2ah}{(A-a)}\,x - \frac{Q}{\gamma}\cdot\frac{2h}{b(A-a)} = 0.$$

Beispiel. Wie tief sinkt eine Flußfähre von 5400 ℔ Gewicht ein, wobei $A = 40'$, $a = 30'$, $B = b = 12'$ und $h = 3\frac{1}{2}'$ ist, wenn 90 Menschen, von 140 ℔ Durchschnittsgewicht für einen Jeden, darin Platz nehmen.

Auflösung. Zuerst ist $Q = 90 \,.\, 140 + 5400 = 18000$ ℔, ferner $\frac{2ah}{A-a} = 21$, $\frac{2h}{b(A-a)} = 0{,}058$ und sonach:

$$x^2 + 21\,x = \frac{0{,}058 . 18000}{\gamma} \text{ und für } \gamma = 53{,}2 \text{ ℔ hannov.}$$

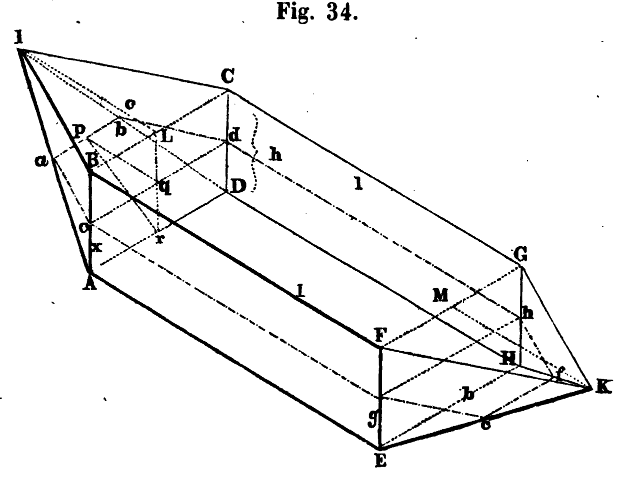
$$x^2 + 21\,x = 19{,}62, \text{ d. i.}$$

$$x = 0{,}9 \text{ Fuß.}$$

§. 33.

Aufgabe. Man soll die Tiefe der Einsenkung eines Schiffes bestimmen, dessen isometrische Projection Fig. 34 darstellt.

Fig. 34.



Auflösung. Das Mittelstück $ACEG$ bilde ein gerades Parallelepipedum, wovon die Länge $AE = BF = CG = l$, die Breite $AD = BC = EH = b$, die Tiefe $AB = CD = EF = h$ sein mag. Jeder der beiden gleichen Schnäbel bilde eine vierseitige Pyramide mit rectangulärer Basis, die Länge $IL = KM$ jedes Schnabels sei $= c$. Die punctirten Linien $acgefhdba$ mögen die Durchschnittsfläche des Schiffes mit der Schwimmebene bezeichnen, die Eintauchungstiefe $cA = dD = gE = hH$ werde $= x$ gesetzt. Der Cubikinhalt des eingetauchten Theiles vom Mittelstücke ist hiernach $= xbl$. Die eingetauchten Theile der Schnäbel bilden schief abgeschnittene dreiseitige Prismen $abcdAD$ und $efghEH$, wovon jede der parallelen Seiten ab und $ef = \frac{b}{h}(h - x)$, die beiden andern $cd = gh = b$, die normalen Querschnitte $pqr = \frac{1}{2}\frac{c}{h}x^2$ *), mithin der Cubikinhalt beider dreiseitiger Prismen zusammen $= \frac{1}{3}\frac{bc}{h^2}(3h - x)x^2$ ist.

Bezeichnet daher W das Gewicht des leeren Schiffes und P das der Ladung, so erhält man:

$$\text{I.}\quad P + W = \gamma blx + \tfrac{1}{3}\gamma\frac{bc}{h^2}(3h - x)x^2, \text{ und hieraus}$$

$$\text{II.}\quad x^3 - 3hx^2 - 3\frac{h^2l}{c}x + \frac{3h^2}{\gamma bc}(P + W) = 0.$$

Beispiel. Die Holzschiffe auf der Moldau und Oberelbe haben eine ganz ähnliche Gestalt, wie Fig. 34 und nachbemerkte Dimensionen: **)

$l = 48$ Fuß, $b = 12'$, $c = 12'$, $h = 4'$ und ihr Gewicht beträgt unbelastet $= 12366$ ℔, es fragt sich, zu welcher Tiefe dieselben in letzgedachtem Zustande einsinken?

Aufgabe. Die Gleichung II giebt, wenn $P = 0$, $W = 12366$ und $\gamma = 53{,}2$ gesetzt wird:

$$x^3 - 12x^2 - 192x + 77{,}41 = 0,$$

$$x = 0{,}3941 \text{ Fuß}.$$

---

*) Es verhält sich $BC : ab = AB : Bc$, d. i. $b : \overline{ab} = h : h - x$ und $\overline{ab} = \frac{b}{h}(h - x)$; ferner ist $\triangle\overline{pqr} = \frac{\overline{pq}\cdot\overline{qr}}{2}$, so wie $IL : Lr = pq : qr$, oder $c : h = \overline{pq} : x$, mithin $\Delta\overline{pqr} = \frac{cx \cdot x}{2h} = \frac{cx^2}{2h}$.

**) Gerstner, Handbuch der Mechanik, Bd. I, S. 57.

Zusatz. Die Gleichung II läßt sich auch zur Berechnung einer sogenannten Aichscala für Schiffe von der Form wie Fig. 34 benutzen, d. h. einer Scala, welche zu beiden Seiten des Schiffes so angebracht ist, daß der Punct, bis zu welchem das Schiff einsinkt, das Gewicht der jedesmal vorhandenen Ladung angiebt.

Mit Beibehaltung der obigen Maße läßt sich leicht folgende Tabelle entwerfen:

x'	W ℔	P ℔	$(P+W)$ ℔	Differenzen.		
0,3941	12366	0	12366,00			
0,50	—	3414,49	15780,49			
				3260,47		
0,60	—	6674,92	19040,92		32,55	
				3293,02		0,94
0,70	—	9967,94	22333,94		31,61	
				3324,63		0,97
0,80	—	13292,57	25658,57		30,64	
				3355,27		0,95
0,90	—	16647,84	29013,84		29,69	
				3384,96		
1,00	—	20032,80	32398,80			

Die Verschiedenheit der dritten Differenzen ist unvermeidlichen Fehlern zuzuschreiben Im Mittel wird die dritte Differenz zu 0,95 anzunehmen und hiernach die Aichscala beliebig zu erweitern sein.

Anmerkung. Es dürfte hier der geeignetste Ort sein, Einiges über die Ausmessung der Fluß- und Seeschiffe anzuführen.

Die Ausmessung der Schiffe (Aichen der Schiffe, Jaugeage, Measurement of Ships) geschieht aus einem doppelten Grunde. Einmal um durch dieselbe dem Rheder und Schiffer einen Anhaltspunct für die Belastung zu geben, damit Ueberladungen und dadurch Gefahren für Leben und Eigenthum vermindert werden; zweitens um die öffentlichen Abgaben zu reguliren, welche der Schiffer unter höchst verschiedenen Namen, sowohl im eigenen Lande wie auswärts, zu leisten hat.

Zur Zeit geschieht dies Ausmessen und Rechnen überall nach practischen Regeln, die meistentheils unendlich weit entfernt von den mathematischen Theorien liegen, auf welche sich streng genommen derartige Meßverfahren und Rechnungen gründen müßten.

Zweierlei Methoden sind es insbesondere, nach welchen man überhaupt verfährt. Nach der einen geht man von dem einfachen Gesichtspuncte aus, daß der fragliche Inhalt des Schiffes annäherungsweise gefunden werden kann, wenn man seine drei größten Dimensionen, Länge, Breite und Höhe mit einander multiplicirt und das Product mit einer Erfahrungszahl dividirt. Nach der anderen Methode bestimmt man diese drei Dimensionen nach wiederum besonderen, von der jedesmaligen Schiffsform abhängenden Regeln und verfährt erst dann in ähnlicher Weise.

Die erstere Methode ist gesetzlich in Hannover, Hamburg, Bremen, in Frankreich, in England jedoch nur für beladene Schiffe eingeführt. Nachstehendes wird weiter hierüber belehren.

A. Hannoversche Instruction, wie die Ladungsfähigkeit der Seeschiffe auszumitteln ist.

(Verordnung vom 1. October 1833. — Gesetzsammlung, III. Abtheil., Nr. 10, 16. Nov. 1833. — Ebendaselbst Abth. I., Nr. 25, 21. Juli 1840.)

1) Auf jedem Schiffe sind drei Dimensionen (in Calenberger Fußen, bis auf einen Zoll genau) zu messen, nämlich
   a. die Länge auf dem Verdecke zwischen beiden Steven;
   b. die größte Breite des Raumes zwischen den Wegern (Deckbalkenträgern) des Hauptgespannts oder bei der großen Luke;
   c. an eben der Stelle, bei der großen Luke, die Tiefe des Raumes, von den Bauchdielen dicht am Kollschwinn lothrecht aufwärts bis unter die Deckplanken.

2) Die Berechnung der Lasten à 6000 ℔ geschieht aus den gemessenen Linien nach folgenden Regeln:
   a. Von der Länge des Verdecks wird die Tiefe des Raumes subtrahirt, und der Rest Länge des Raumes inwendig auf dem Kiele genannt;
   b. die Länge, Breite und Tiefe des Raumes, in Fußmaß ausgedrückt, werden mit einander multiplicirt;
   c. das dadurch erhaltene Product durch 300 dividirt, so giebt der Quotient die Zahl der Lasten (Commerzlasten) à 6000 ℔, wofür das Schiff in den Meßbrief zu notiren, und anzusehen ist, daß es dieses Gewicht in Stückgütern fassen und tragen kann.

Beispiel zu den Berechnungen.

Ein Schiff ist gemessen und befunden worden:

Decklänge zwischen den Steven	85	Fuß	1	Zoll
Größte Breite des Raumes	20	-	8	-
Tiefe des Raumes	13	-	6	-

daher Länge des Raumes: $85' 1'' - 13' 6'' = 71\frac{1}{2}$ Fuß in runder Zahl. Nun ist genau genug:

$$71\tfrac{1}{2} \times 20\tfrac{2}{3} \times 13\tfrac{1}{2} = 19948 \text{ Cubikfuß},$$

welcher letzterer Werth durch 300 dividirt die Zahl von $66\frac{148}{300}$ = $66\frac{1}{2}$ Last, à 6000 ℔ giebt.

Eine unbedeutende Abänderung erfährt diese Vorschrift bei einem Schiff mit Zwischendeck.

Die ganze Vorschrift leidet jedenfalls an dem Hauptübel, daß das Verfahren desselbe bleibt, mag das Schiff mehr oder weniger scharf gebaut sein oder nicht.

Noch etwas besser ist deßhalb die Hamburger Regel zum Schiffsausmessen.

B. Practische Regeln zum Aichen der Schiffe in Hamburg.

(Laut Instruction vom October 1819.)

1) Das Meßverfahren ist ganz gleich der hannoverschen Instruction.

2) Die drei in Fußmaßen bestimmten Zahlen werden mit einander multiplicirt und das Product entweder dividirt durch 320, oder durch 300, oder durch 280, je nachdem das Schiff scharf oder mittel oder flach im Boden gebaut ist; der entstehende Quotient giebt die Zahl der Commerzlasten zu 6000 ℔.

C. Das französische Gesetz schreibt folgendes Verfahren vor.

(Ordonnance du 12 nivôse an II et du 18. Novembre 1837 sur le Jaugeage de navires.)

Ajoutez la longueur du pont prise de tête en tête à la distance de l'étrave [1]) à l'étambot [2]); multipliez-les l'une par l'autre et prenez la moitié du produit; multipliez cette moitié par la plus grande largeur du navire au maître-bau [3]); multipliez, encore, ce produit par la hauteur de la cale [4]) et de l'entrepont [5]); et divisez par 3,8: le quotient sera le port du bâtiment en tonneaux ordinaires. Si le bâtiment n'a qu'un pont, on prend la plus grande longueur du bâtiment, on la multiplie par la plus grande largeur, et le produit par la plus grande hauteur; puis ou divise par 3,8. Toutes les dimensions seront exprimées en mètres.

D. Verfahrungsarten in England.

(Measurement of a Ship or Vessel by the Rule for Tonnage, enacted by Acts of Parliament of the 5th and 6th years of the reign of William IV. — 9. Sept. 1835.)

Nach diesem Gesetze ist bei leeren Schiffen nach der erstern Methode zu verfahren, d. h. Länge, Breite und Höhe sind nach ganz besonderen Vorschriften durch Ermittelung vielfacher Dimensionen zu bestimmen; bei vollen Schiffen wie folgt:

All ships or vessels, whether belonging to the United Kingdom or other wise, if there shall be occasion to measure them while their cargoes are on board, shall be computed by the following rule and dimensions:

---

1) Steven.
2) Hintersteven.
3) Deckbalken an der größten Breite.
4) Raum.
5) Zwischendeck.

1) The length on the upper deck between the after part of the stem (Vorsteven) and the fore part of the stern post (Hintersteven).
2) The inside breadth on the under side of the upper deck at the middle point of the foregoing length.
3) The depth from the under side of the upper deck, down the pump well to the limber strakes (Sandbord) or internal plank.

With these three dimensions ascertained, the Act directs that the product of the three, viz. length multiplied by breadth, and their product by the depth, shall give a result wich, being divided by 130, the quotient shall be considered as an approximation to the true register tonnage (in Tons) of the ship, or her capacity for carrying stores and cargo.

E. Schleswig-Holstein'sche (Dänische) Schiffsmessung.

(Instruction für die Schiffsmessung in den Herzogthümern Schleswig und Holstein. 7. Februar 1843.)

Wie bereits bei der englischen Methode für leere Schiffe bemerkt, wird auch hier und zwar in weit richtigerer Weise zur Vorschrift gemacht, Länge, Breite und Tiefe des zu bestimmenden Raumes für jedes Schiff nach ganz besondern Regeln zu ermitteln und durch Anwendung geeigneter Divisoren, resp. Multiplicatoren, wie sie sich aus Versuchen mit Schiffen von verschiedener Bauart ergeben haben, die Tragfähigkeit des Schiffes zu berechnen.

Des hier mangelnden Raumes wegen läßt sich Weiteres über diese (beste) Methode des Schiffsmessens nicht mittheilen und muß daher auf obige amtliche Quelle verwiesen werden. So viel scheint dabei gewiß, daß dieselbe den Anforderungen der Mathematik besser als irgend eine andere Methode und überhaupt so nahe entspricht, als dies der Natur der Sache nach überhaupt möglich sein dürfte.

Nicht uninteressant wird die Bemerkung sein, daß die im Jahre 1849 vom damaligen Reichsministerium des Handels in Hamburg zusammenberufene Commission, „zur Berathung eines Verfahrens für Vermessung der Seeschiffe in den deutschen Häfen", die Ermittelung des cubischen ganzen Schiffsraumes nach der schleswig-holsteinschen Methode (unter Anwendung der betreffenden Coefficienten-Tabellen) für die annähernd richtigste anerkannte und mit wenigen Abänderungen für Deutschland als genaue, definitive Messung einzuführen vorschlug.

Als Interims Messung (einfaches Verfahren für beladene Schiffe) wurde von gedachter Commission die Hamburger Regel, jedoch mit vier verschiedenen Divisoren, als ausreichend angenommen.

Gesetzlich ist eine dänische (schleswig-holsteinsche) Commerzlast (= 5200 ℔) gleich zu rechnen

1,00 norwegischen Commerzlast,
1,06 schweren schwedischen Lasten,
1,32 holländischen Lasten,
1,34 hamburger Lasten (à 4000 ℔),
0,8933 hamburger Commerzlasten (à 6000 ℔),
1,39 preußischen Normallasten,
0,9252 hannoverschen Commerzlasten (à 6000 ℔),

2,52 englischen Tons,
2,65 französischen Tonneaux,
1,26 russischen Lasten,
2,52 amerikanischen Tons,
2,69 spanischen Tonnelades.

§. 34.

Bei allen Schiffen, deren Theile nicht auf die eine oder andere der einfachen geometrischen Körperformen zurückzuführen sind, wie dies bei allen größern Flußschiffen, insbesondere aber bei allen See-, Segel- und Dampf-Schiffen der Fall ist, benutzt man zur Inhaltsberechnung des eingetauchten Schiffkörpers mit ganz entschiedenem Vortheile die Simpson'sche Regel (§. 51 der Geostatik). Hierzu denkt man sich den betreffenden Körper durch (zur Schwimmebene) horizontale oder verticale Schnittebenen in eine den Umständen entsprechende Anzahl von Theilen zerlegt, wovon man zuerst die Inhalte der ebenen Begrenzungsflächen, sodann aber durch abermalige Anwendung der gedachten Regel, die Körperräume berechnet.

Um hierüber vollständige Einsicht zu erlangen, benutzen wir zu den gedachten Berechnungen nachstehende von Redtenbacher (Resultate für den Maschinenbau, zweite Auflage, S. 253) aus Tredgold's Werke über die Dampfmaschinen (Anhang *A* und *B*) zusammengestellte Tabelle, welche die Verhältnisse des englischen Dampfschiffes Rainbow angiebt. Zur ferneren Erläuterung dienen die Figuren 35 und 36.

Fig. 35.

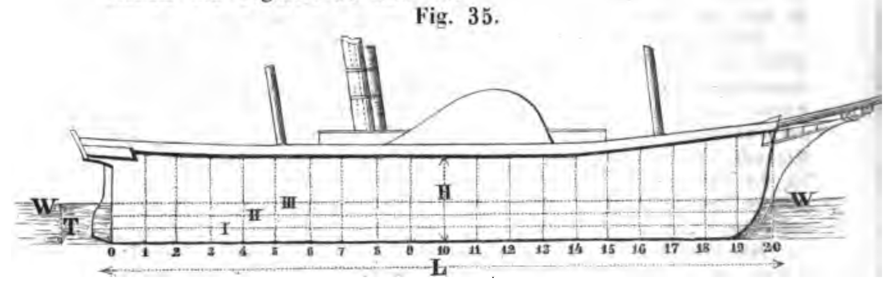
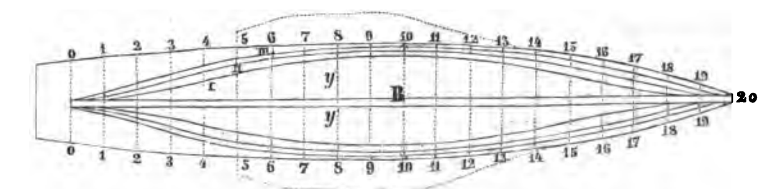


Fig. 36.



Dabei ist die $= L$ gesetzte Länge des Schiffes zwischen den sogenannten Perpendicularen in 20 gleiche Theile getheilt, die Tauchung $= T$, für die normale Belastung in 6 gleiche Theile (wovon, um nicht undeutlich zu werden, in der Figur nur vier gezeichnet sind) und die größte Breite (die des Hauptspannten) in der Schwimmebene $= B$ gesetzt.

Die Verticalreihen der Tabelle sind die Ordinatenwerthe der Begrenzungscurve des jedesmaligen Horizontalschnittes, wenn man die größte Breite in der Schwimmebene gleich 2000 setzt, so daß diese Werthe mit $\frac{B}{2000}$ *) multiplicirt werden müssen, um ihre wahren Größen zu erhalten. Die Horizontalreihen sind eben so die Ordinaten der einzelnen Querprofile etc.

Hinterschiff.							**Vorderschiff.**						
Nr. des Querschnitts	Ordinaten der Horizontalschnitte.						Nr. des Querschnitts	Ordinaten der Horizontalschnitte.					
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.		I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
0	20	20	20	20	20	20	10	770	860	930	950	980	990
1	75	110	150	200	260	336	11	745	850	900	940	960	980
2	165	250	325	385	455	520	12	710	810	860	910	940	960
3	280	400	480	530	590	640	13	640	750	810	845	870	900
4	400	530	610	665	710	750	14	545	665	730	760	800	830
5	515	640	700	750	790	830	15	440	550	620	660	700	735
6	610	710	770	820	860	890	16	320	460	530	570	610	645
7	680	770	830	880	910	930	17	200	300	350	390	430	460
8	730	820	880	910	945	960	18	90	160	210	230	260	290
9	760	860	910	940	970	990	19	30	35	55	70	80	90
10	770	860	930	950	980	990	20	—	—	—	—	—	—

Zusatz 1. Berechnung des Volumens $= v$ der verdrängten Flüssigkeit aus den Horizontalschnitten. Es bezeichne K den relativen Flächeninhalt eines der Horizontalschnitte, oder das Verhältniß des wahren Inhaltes $= F$ zum Inhalte des der Schwimmfläche umschriebenen Rechteckes, d. i. $k = \frac{F}{BL}$, $y_0, y_1, y_2 \ldots y_{19}$ die Ordinatenwerthe der Tabelle, so daß die wahren Ordinatenwerthe also: $\frac{y_0 B}{2000}, \frac{y_1 B}{2000}$ etc. . . . $\frac{y_{19} B}{2000}$, so ergiebt sich nach der Simpson'schen Regel ohne Weiteres

*) Setzt man die (halbe) wirkliche Ordinate $= \eta$, so verhält sich $\eta : y = B : 2000$, d. i. $\eta = \frac{yB}{2000}$ u. s. w.

$$k = \frac{F}{BL} = \frac{1}{20000} \cdot \frac{1}{3} \left\{ y_0 + y_{20} + 2(y_2 + y_4 \cdots y_{18}) + 4(y_1 + y_3 \cdots y_{19}) \right\}.$$

Daher für den ersten Schnitt:

$y_0 + y_{20} = 20,$

$y_2 = 165$	$y_1 = 75$
$y_4 = 400$	$y_3 = 280$
$y_6 = 610$	$y_5 = 515$
$y_8 = 730$	$y_7 = 680$
$y_{10} = 770$	$y_9 = 760$
$y_{12} = 710$	$y_{11} = 745$
$y_{14} = 545$	$y_{13} = 640$
$y_{16} = 320$	$y_{15} = 440$
$y_{18} = 90$	$y_{17} = 200$
$4340 \times 2 = 8680;$	$y_{19} = 30$
	$4365 \times 4 = 17460;$ also

$$k_1 = \frac{1}{60000}(20 + 8680 + 17460) = 0{,}436.$$

Auf dieselbe Weise verfahren, erhält man (den 0ten Schnitt = Null gesetzt):

$$k_0 = 0; k_1 = 0{,}4360; k_2 = 0{,}526833; k_3 = 0{,}582167; k_4 = 0{,}620667;$$
$$k_5 = 0{,}656333; \; k_6 = 0{,}687567.$$

Hieraus endlich:

$$\frac{v}{LBT} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \left\{ k_0 + k_6 + 2(k_2 + k_4) + 4(k_1 + k_3 + k_5) \right\}, \text{ d. i.}$$

$$\frac{v}{LBT} = 0{,}53781 \text{ und}$$

$$v = 0{,}53781 \, . \, LBT.$$

Zusatz 2. Begreiflicher Weise muß sich v auch aus den Verticalschnitten berechnen lassen, was zur Beurtheilung der Uebereinstimmung geschehen mag.

Zuerst erhält man, den relativen Flächeninhalt der Verticalschnitte mit r bezeichnet, d. h. $r = \frac{F}{TB}$ gesetzt, wenn die betreffenden Ordinaten durch z ausgedrückt werden:

$$r = \frac{F}{TB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1000} \left\{ z_0 + z_6 + 2(z_2 + z_4) + 4(z_1 + z_3 + z_5) \right\}.$$

Daher für den Verticalschnitt, weil hier $z_0 + z_1 = 20$; $2(z_2 + z_4) = 80$; $4(z_1 + z_3 + z_5) = 240$ ist,

$$r_0 = \frac{1}{18000}(20 + 80 + 240) = 0{,}018889.$$

So fortgefahren ergiebt sich überhaupt:

$$\begin{array}{llll} r_0 = 0,018889 & r_5 = 0,646111 & r_{10} = 0,851667 & r_{15} = 0,566389 \\ r_1 = 0,160889 & r_6 = 0,717222 & r_{11} = 0,832222 & r_{16} = 0,474722 \\ r_2 = 0,309444 & r_7 = 0,772778 & r_{12} = 0,802222 & r_{17} = 0,320000 \\ r_3 = 0,438889 & r_8 = 0,81333 & r_{13} = 0,742778 & r_{18} = 0,183889 \\ r_4 = 0,556667 & r_9 = 0,841667 & r_{14} = 0,665556 & r_{19} = 0,053333 \end{array}$$

Ferner ist $\frac{v}{BLT} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{20} \left\{ r_0 + r_{20} + 2(r_2 + r_4 \ldots r_{18}) + 4(r_1 + r_3 \ldots r_{19} \right\}$,
also, wenn man vorstehende Zahlenwerthe substituirt:

$$\frac{v}{BLT} = 0{,}53781 \text{ oder}$$

$$v = 0{,}53781 . BLT.$$

So weit sich die bestimmten Zahlenwerthe von B, L und T aus den Zeichnungen des oben citirten Tredgold'schen Werkes entnehmen lassen, ist $L = 182{,}50$ Fuß (engl.), $B = 24',75$ und $T = 6',00$, d. i. $v = 14575{,}33$ Cubikfuß.

§. 35.

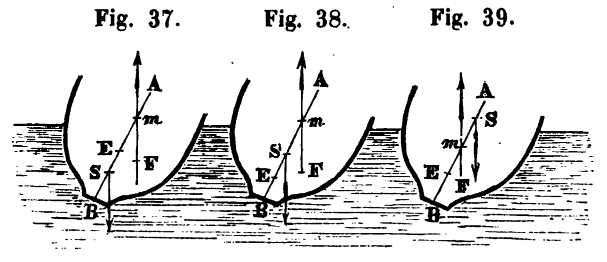
Stabilität schwimmender Körper.

Für die technische Mechanik noch besonders wichtig ist die Aufsuchung der Bedingungen, unter welchen ein Körper mit Stabilität, Instabilität oder mit völliger Gleichgültigkeit schwimmt.

Hierzu nehmen wir an, daß der im Wasser schwimmende Körper nicht gleichartig ist, vielmehr in seinem Innern eine Substanz (Ladung) enthält, deren Dichte größer als die des Wassers ist, und folglich der Schwerpunct des eingetauchten Körpertheils nicht mit dem des verdrängten Wassers zusammenfällt.

Fig. 37 bis mit 39 mögen sodann drei schwimmende Körper vorstellen, welche durch irgend eine Kraft aus der ursprünglich aufrechten Gleichgewichtslage in eine neue schiefe Lage gebracht wurden, ohne daß letztere ein Gleichgewicht an sich zulässt, Auftriebs- und Schwerkraftsrichtungen also nicht in derselben Verticalen liegen.

Fig. 37. Fig. 38. Fig. 39.



In allen drei Figuren bezeichnen S den Schwerpunct des ganzen Körpers (einschließlich der Ladung), E den Schwerpunct des verdrängten Wassers bei aufrechter und F bei geneigter Stellung.

Jeder dieser Körper ist sodann (ähnlich wie bereits §. 27 erörtert wurde) der Wirkung zweier Kräfte unterworfen, die ihn veranlassen, zwei verschiedene Bewegungen anzunehmen, nämlich eine fortschreitende, vertical aufwärts durch den Schwerpunct S gerichtete, und eine Drehbewegung um eine durch diesen Schwerpunct gehende horizontale Axe, welche letztere rechtwinklig auf der Verticalebene steht.

Die fortschreitende Bewegung des Schwerpunctes kann für die hier folgenden Untersuchungen außer Acht bleiben, wenn man nur berücksichtigt, daß bei aufrechter und schiefer oder geneigter Stellung des Körpers, unter sonst einerlei Umständen, stets ganz gleiche Wasservolumen verdrängt werden müssen, was nothwendiger Weise, für die meisten Fälle, eine Veränderung der Drehaxenlage voraussetzt und in die betreffenden Rechnungen mit einführt.

Sodann lässt sich aus der nähern Betrachtung der Figuren unmittelbar entnehmen, daß, wenn die Lage der Puncte F und S die von 37 und 38 ist, der Körper ein Bestreben besitzt, in seine ursprüngliche Stellung zurückzukehren; dagegen wenn die gedachten Puncte die Lage von Fig. 39 haben, dieses Bestreben darin besteht, den Körper immer mehr von der ersten Stellung zu entfernen, d. h. solchen endlich umzuschlagen.

Verlängert man, zur weiteren Untersuchung, die durch F gehende Auftriebsrichtung, bis solche die vorher verticale Axe AB des Körpers in einem Puncte m schneidet, so ergiebt sich leicht, daß der Körper mit Stabilität schwimmt, sobald dieser Punct höher als der Schwerpunct S liegt, dagegen umschlägt, mit Instabilität schwimmt, wenn m unter S liegt, so wie endlich, daß der Zustand völliger Gleichgültigkeit eintritt, sobald m mit S zusammenfällt. Gedachten Punct m nennt man das Metacentrum des schwimmenden Körpers. *)

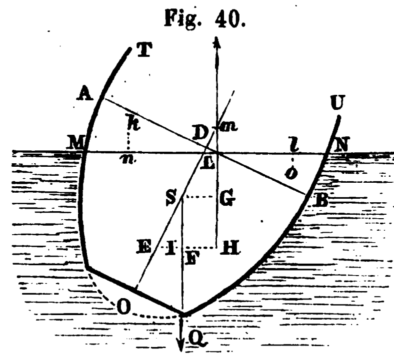
§. 36.

Es mag jetzt gezeigt werden, wie man die Stabilität eines schwimmenden Körpers, für jeden besondern Fall, durch Rechnung zu bestimmen im Stande ist, wobei wir jedoch nur Formen voraussetzen wie sie beim Schiffsbaue vorkommen, d. h. solche Körper, welche beim aufrechten Stande von einer durch die Schwimmebene und Längenaxe gelegten Verticalebene (Masten-

*) Von Μετὰ jenseits und Κέντρον Mittelpunct.

ebene) in zwei völlig symmetrische Theile getheilt werden. Außerdem werde vorerst angenommen, es bilden alle Querschnitte des betreffenden Schiffes ähnlich gleiche Figuren, so daß Flächen als mit Volumen gleichgeltend aufgeführt werden können.

Fig. 40.



In Fig. 40 sei *TOU* das schwimmende Schiff, *S* dessen Schwerpunct (einschließlich Ballast und Ladung), *AOB* das verdrängte Wasservolumen (Déplacement) bei aufrechter Stellung und *MNO* dasselbe nach der Drehung des Schiffes, um den beliebigen Winkel *OSQ*, *SQ* vertical vorausgesetzt. Bei der ersten Stellung sei *E* der Schwerpunct des Déplacements, bei der zweiten liege derselbe in der noch unbestimmten Verticalen *HL*.

Zieht man nun vom unveränderlichen Schwerpuncte *S* die Linie *SG* rechtwinklig gegen die Auftriebsrichtung *HL*, so erkennt man leicht, daß Alles auf die Bestimmung von *SG*, als Hebelarm des Auftriebes, ankommen wird, um das Drehungs- oder Stabilitäts-Moment angeben zu können.

Hierzu werde vorerst in Erinnerung gebracht, daß, um welchen Winkel das Schiff (bei gleichbleibender Ladung) auch gedreht werden mag, das Déplacement stets dasselbe bleiben, folglich *ALM* für alle Fälle gleich *BLN* sein wird, wobei *L* den Durchschnittspunct der ersten Schwimmebene *AB* mit der neuen *MN* bezeichnet, ein Punct, dessen Lage, wie aus dem später Folgenden zu entnehmen, besonders durch die Gestalt der oberen Seitenwände des Schiffes bestimmt wird.

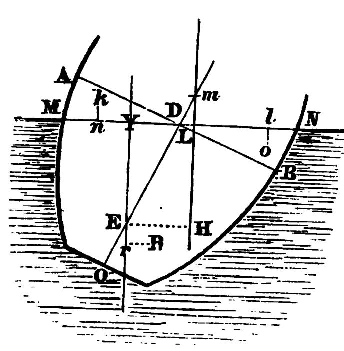
Sodann mögen die Schwerpuncte von *AML* und *BLN* respective in *k* und *o* liegen und von diesen auf *MN* die Senkrechten *kn* und *lo* gefällt sein. Zieht man ferner von *E* auf die neue Auftriebsrichtung die Normale *EH*, so wird letztere durch die Proportion bestimmt $MON : BLN = nl : EH$.

Denn bezeichnet in Fig. 41 *R* den Schwerpunct des Volumentheiles *MOBLM*, so erhält man für das Gleichgewicht, in Bezug auf eine durch *E* gelegte Verticalebene *EY*, die Momentengleichung:

$$(1) \quad MON \times EH = MOBLM \times rR + LBN \times ly,$$

ferner aber auch $AOB \times \text{Null} = MOBLM \times rR + ALM \times (-yn)$,

Fig. 41.



d. i.

$$MOBLM \times rR = ALM \times yn,$$

daher aus (1)

$$MON \times EH = ALM \times ny + LBN \times yl \text{ und,}$$

wegen $MAL = LBN$,

$$MON \times EH = LBN\,(ny + yl) = LBN \times nl.$$

Demnach ist überhaupt $EH = \frac{BLN}{MON} \cdot nl$, oder wenn das Volumen $BLN = v$, das $MON = V$ und $nl = b$ gesetzt wird

$$(2) \quad EH = \frac{v}{V} \cdot b.$$

Wird nun angenommen, daß der Abstand der Puncte S und E, Fig. 40, bekannt und gleich d ist und bezeichnet φ den Neigungswinkel $OSQ = BLN$, so folgt $EI = ES \sin . \varphi = d \sin . \varphi$. Wird sodann letzterer Werth von (2) abgezogen, so erhält man, weil $IH = SG$,

$$(3) \quad SG = \frac{v}{V} b - d \, . \sin . \varphi.$$

Bezeichnet daher Q das Gewicht des Déplacements oder das des ganzen Schiffes, so ergiebt sich das Stabilitätsmoment $= M$, zu

$$\text{I.} \quad M = Q\left(\frac{v}{V} b - d \sin \varphi\right).$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß der Schwerpunct S des Schiffes über den Schwerpunct E der verdrängten Flüssigkeit liegt, findet das umgekehrte Statt, so ist d negativ zu nehmen und man erhält

$$\text{II.} \quad M = Q\left(\frac{v}{V} b + d \, . \sin . \varphi\right).$$

Leicht erkennt man, daß der Ausdruck I. weder Null sein, noch einen negativen Werth geben darf, wenn das Schiff aus der geneigten Lage von selbst in die aufrechte zurückkehren soll. Außerdem wird man bemerken, daß, unter sonst gleichen Umständen, das Stabilitätsmoment namentlich von der Gestalt der

Seitenwandtheile des Schiffes abhängt, welche zwischen den horizontalen Ebenen liegen, die man sich durch die Puncte A und B gelegt denken kann, oder nach der technischen Sprache, von der Zone, die zwischen Wind und Wasser liegt.

Die Höhe des Metacentrums über E, d. i. Em, ergiebt sich endlich mit Hülfe von (2) zu

$$\text{III.}\quad Em = \frac{EH}{\sin.\varphi} = \frac{v.b}{V.\sin.\varphi}.$$

Anmerkung 1. Wird der Neigungswinkel φ als unendlich klein angenommen, so kann (Fig. 40) D mit L als zusammenfallend betrachtet, und, wie auch die Seiten des Schiffes gestaltet sein mögen, können die Flächen AMD und BDN als ähnlich gleiche Dreiecke angesehen werden. Bezeichnet sodann y die halbe veränderliche Breite $AD = BD$ des Schiffes (in der Schwimmebene gemessen) so läßt sich nach §. 40 Geost., $b = \frac{4}{3}\,y$ setzen. Denkt man sich ferner die Längenaxe des Schiffes in sehr kleine Theile vom resp. Abstande gleich e getheilt und durch die Theilpuncte Verticalebenen gelegt, so folgt für das Volumen eines der so erhaltenen Elementarkörper: $y.\frac{y\sin.\varphi}{2}.e = \frac{y^2\sin.\varphi.e}{2}$. Bildet man ferner sodann die Producte aus jedem der letztern Ausdrücke in die respective Größe $= \frac{4}{3}y$ und addirt solche, so folgt $vb = \frac{2}{3}\sin.\varphi\Sigma(y^3e)$ und hieraus $M = Q\left[\frac{\frac{2}{3}\sin\varphi\Sigma(y^3e)}{V} - d.\sin\varphi\right]$, so wie die Höhe des Metacentrums über dem Schwerpunct des Déplacements

$$Em = \frac{2}{3}\frac{\Sigma(y^3e)}{V}.$$

Diese Ausdrücke hat zuerst Bouguer in seinem Traité du Navire S. 272 angegeben. Den Mangel derselben erkennt man leicht, da die Voraussetzung eines unendlich kleinen Neigungswinkels höchstens für Flußschiffe zulässig wäre.

Dennoch benutzt man diesen Ausdruck für gewöhnliche practische Fälle seiner Einfachheit wegen, und letzteres werde auch hier als Grund genommen, denselben zur betreffenden Berechnung des englischen Dampfschiffes Rainbow (§. 34) zu verwenden.

Zuerst erhält man, weil y vorstehender Formel durch $\frac{By}{2000}$ ersetzt werden muß, ferner $e = \frac{L}{20}$ ist:

$$\overline{Em} = \frac{B^3.L\Sigma(y^3)}{240\,000\,000\,000.v}.$$

Nach der Tabelle, §. 34, ist aber $\Sigma y^3 = [20^3 + 336^3 \ldots + 290^3 + 90^3] = 9683585556$, ferner war $v = 0{,}53781.BLT$, daher die Metacentrumhöhe:

$$Em = \frac{0,9683585556}{24.0,53781} \cdot \frac{B^2}{T},$$

$$Em = 0,075023 \frac{B^2}{T}.$$

Endlich speciell für das Dampfschiff Rainbow, wo $B = 24',75$, $T = 6',00$ ist:

$$Em = 7,65938 \text{ Fuß englisch.}$$

Anmerkung 2. Zur völligen Beantwortung betreffender Stabilitätsfragen ist noch die Lage des Schwerpunctes E der verdrängten Flüssigkeit zu bestimmen nöthig.

I. Höhe $= Z$ des Schwerpunctes der verdrängten Flüssigkeit über dem Kiel des Schiffes.

Unter Beibehaltung der Bezeichnung §. 33 und mit Zuziehung von §. 59 der Geostatik, ergiebt sich ohne Weiteres:

$$Z = \tfrac{1}{6} T \left\{ \frac{0.k_0 + 1.4k + 2.2k_2 + 3.4k_3 + 4.2k_4 + 5.4k_5 + 6k_6}{k_0 + 4k_1 + 2k_2 + 4k_3 + 2k_4 + 4k_5 + k_6} \right\}.$$

Für die Zahlenwerthe in §. 34:

$$Z = \frac{T}{6} \cdot \frac{33,054733}{9,68034} = 0,56909 \,.\, T.$$

Endlich für das Schiff Rainbow, wo $T = 6,00$:

$$Z = 3,41454 \text{ Fuß.}$$

II. Horizontalabstand $= X$ des Schwerpunctes der verdrängten Flüssigkeit vom hintern Ende des Kieles.

Auf ganz gleichem Wege wie vorher, mit den Bezeichnungen von §. 33 ergiebt sich sofort:

$$X = \frac{L}{20} \left\{ \frac{0r_0 + 1.4.r_1 + 2.5.r_2 \ldots . 19.4.r_{19} + 20r_{20}}{r_0 + r_{20} + 2(r_2 + r_4 \ldots r_{18}) + 4(r_1 + r_3 \ldots r_{19})} \right\}.$$

Nach §. 34 läßt sich aber der Nenner durch $\frac{60\,v}{BLT}$ ersetzen, so wie ferner ist, wenn man die Tabellenwerthe §. 34 substituirt:

$$X = \frac{L}{1200} \, \frac{309,873552}{0,53781} = 0,480147 \,.\, L.$$

Speciell für das Schiff Rainbow also, wo $L = 182',5$,

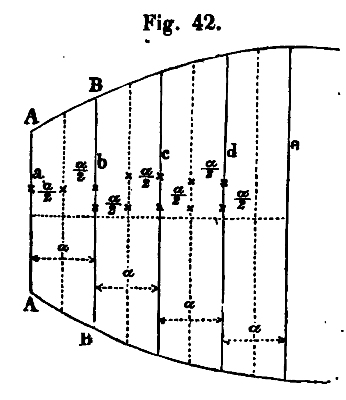
$$X = 87,626 \text{ Fuß.}$$

Anmerkung 3. Eine andere Formel zur Schwerpunctsbestimmung für Flächen vorherbetrachteter (symmetrischer) Gestalt läßt sich wie folgt ableiten: Mit Bezug auf nebenstehende Figur 42 erhält man, den Inhalt der Fläche $= F$ gesetzt,

$$FX = \left\{ \begin{array}{l} \frac{a\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha}{4} \\ + \frac{b\alpha}{2} \cdot \frac{3\alpha}{4} + \frac{b\alpha}{2} \cdot \frac{5\alpha}{4} \\ + \frac{c\alpha}{2} \cdot \frac{7\alpha}{4} + \frac{c\alpha}{2} \cdot \frac{9\alpha}{4} \\ + \frac{d\alpha}{2} \cdot \frac{11\alpha}{4} + \frac{d\alpha}{2} \cdot \frac{13\alpha}{4} \text{ etc., d. i.} \end{array} \right.$$

$$FX = \frac{\alpha^2}{4}\left(\frac{a}{2} + 4b + 8c + 12d \ldots\right).$$

Fig. 42.



Eine noch andere von Bouguer (De la mâture des vaisseaux, p. 126, Paris 1727) angegebene Regel erhält man folgendermaßen:

Jede der von zwei parallelen Geraden *AA*, *BB* etc. eingeschlossenen Flächen wird in ein Rechteck und in zwei congruente Dreiecke zerlegt, z. B. Fläche *ABBA* in das Rechteck vom Inhalte $= a\alpha$ und in die beiden Dreiecke vom Inhalte $\frac{b-a}{2} \cdot \frac{\alpha}{2}$ ein jedes etc., alsdann ergiebt sich leicht:

$$F.X = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha^2}{6}(\ a + \ 2b), \\ \frac{\alpha^2}{6}(\ 4b + \ 5c), \\ \frac{\alpha^2}{6}(\ 7c + \ 8d), \\ \frac{\alpha^2}{6}(10d + 11e), \\ \frac{\alpha^2}{6}(13e + 14f) \text{ etc., d. i.} \end{array} \right.$$

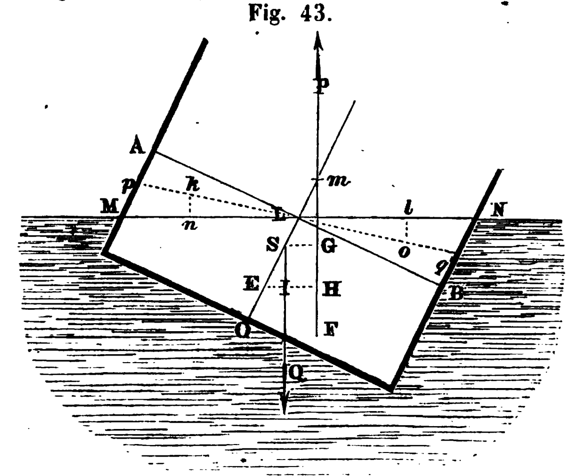
$$F.X = \alpha^2\left(\frac{a}{6} + b + 2c + 3d + 4e + \frac{14}{6}f\right).$$

Beide Formeln stehen an Genauigkeit denen nach, welche aus der Simpson'schen Regel abgeleitet wurden.

§. 37.

Für die Anwendung der vorstehenden allgemeinen Ausdrücke mögen hier einige specielle Aufgaben folgen.

Fig. 43.



Aufgabe 1. Das Schiff, Fig. 43. habe lauter rectanguläre Querschnitte, und gegeben sei das Gesammtgewicht Q, das Déplacement $AOB = MON = V$, die Breite $AB = t$, der Abstand der beiden Schwerpuncte S und $E = d$ und der Winkel, um welchen das Schiff geneigt werden soll, d. i. $\angle OSQ = \varphi$. Die Länge des Schiffes sei der Einheit gleich.

Auflösung. Der Gestalt der Seiten nach ist hier anzunehmen, daß der Querschnittspunct L der beiden Schwimmebenen AB und MN im Halbirungspuncte derselben liegt.*) Deßhalb

---

*) Zieht man durch die Schwerpuncte k und o der Dreiecke AML und LBN die Grade pq, so erhält man $NB = \frac{t.tg.\varphi}{2}$, folglich $qB = \frac{t.tg.\varphi}{4}$ mithin $Lq = \frac{t\sqrt{4 + tg.\varphi^2}}{4}$. Ferner verhält sich $Lq : Nq = \sin.LNq : \sin.NLq$, daher $\sin.NLq = \frac{\sin.\varphi}{\sqrt{4 + tg.\varphi^2}}$ und $\cos^2.(NLq) = \frac{2 + \sec\varphi^2 + \cos.\varphi^2}{4 + tg.\varphi^2}$ oder, weil $2\sec.\varphi \cos.\varphi = 2$ ist, $\cos^2.(NLq) = \frac{(\sec,\varphi + \cos.\varphi)^2}{4 + tg.\varphi^2}$ d. i. $\cos.NLq = \frac{\sec.\varphi + \cos.\varphi}{\sqrt{4 + tg.\varphi^2}}$ da nun $Ll = Lo.\cos.NLq = \frac{2}{3} Lq.\cos.NLq$, so folgt $Ll = \frac{t}{6}(\sec.\varphi + \cos.\varphi)$ und hieraus endlich $b = nl = 2Ll$, wie oben angegeben.

ergiebt sich $v = BLN = \frac{t^2 tg\varphi}{8}$, $b = nl = \frac{t}{3}(\sec\varphi + \cos\varphi)$ und somit das Stabilitätsmoment, nach I. des vorigen §.:

$$(1)\quad M = Q\left\{\frac{t^3 tg.\varphi}{24V}(\sec.\varphi + \cos.\varphi) - d.\sin.\varphi\right\},$$

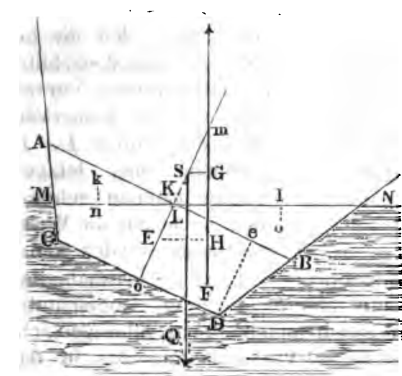
ferner die Höhe des Metacentrums m über E, nach III.

$$(2)\quad Em = \frac{t^3}{24}\,\frac{(\sec.\varphi + \cos.\varphi)}{V.\cos.\varphi}.$$

Ist für einen besondern Fall $t = AB = 100$, $d = 13$, $V = 3600$, $Q = 1000$ Tonnen, *) so erhält man aus (1) $M = 2841,7$ Tonnen. In der Entfernung $= 50$, in der Mastebene von der Drehungsaxe, kann daher eine Kraft (z. B. der Wind) von $\frac{2841,7}{50} = 56,8$ Tonnen wirken, und gegen die aufrechte Stellung eine Neigung von 15° veranlassen, ohne daß das Schiff umschlägt, vielmehr wird dasselbe, wenn gedachte Kraft zu wirken aufhört, nach einigen Schwingungen in die erste, aufrechte Stellung von selbst zurückkehren.

Das Metacentrum liegt dabei nach (2) über E in der Höhe $Em = 23,9$.

Fig. 44.



Aufgabe 2. Die Querschnitte des Schiffes bilden lauter Trapeze $ABCD$, Fig. 44. Gegeben sei die Breite in der Schwimmebene beim aufrechten Stande $AB = a$, ferner $CD = c$, die Eintauchungstiefe $KO = h$, so wie der Neigungswinkel $OSQ = \varphi$.

Auflösung. Vorerst ist die Lage des Punctes L anzugeben, durch welchen die Durchschnittslinie der ersten Schwimmebene AB mit der neuen MN geht, welcher Punct hier (wegen der Gestalt der Seiten AM und BN) nicht im Halbirungspuncte von AB mit MN liegen kann. Wie unten in der Note gezeigt ist, **) kann aber gedachte Bestimmung auf

*) 1 Tonne = 1051,649 Kilogramm = 2240 ℔ engl.

**) Da $\triangle ALM = \triangle BLN$ sein muß, so folgt $BL \times LN = AL \times ML$, und wenn vorerst $LB = x$ gesetzt wird (1) $x.LN = (a-x)ML$. Zur Bestimmung von LN und LM, werde von D auf AB die Normale De gefällt, $\angle DBe$ mit ψ und $\angle BNL$ mit χ bezeichnet.

höchst einfachem geometrischen Wege geschehen, worauf also die Größe v der allgemeinen Formeln, ferner die Schwerpuncte k und σ sowie $ln = b$ zu finden sind. Eben so leicht kann mit Hülfe von §. 47 (Geostatik) die Entfernung $= d$ der beiden Schwerpuncte E und S berechnet werden *), worauf, weil auch $V = Q$ bestimmt werden können, die Aufgabe als gelöst zu betrachten ist.

§. 38.

Es bleibt nunmehr noch übrig, zu zeigen, wie das Stabilitätsmoment für den Fall bestimmt werden kann, wenn alle Querschnitte des Schiffes (merklich) verschieden von einander sind.

Hierzu nehmen wir vorerst an, daß die Längenaxe des Schiffes in entsprechende Theile getheilt ist, durch letztere rechtwinklig zur genannten Axe Verticalebenen gelegt und Form und Inhalt der betreffenden Querschnittsflächen bekannt ist; ferner das Déplacement in gleicher Weise vorher berechnet wurde.

Fig. 45.

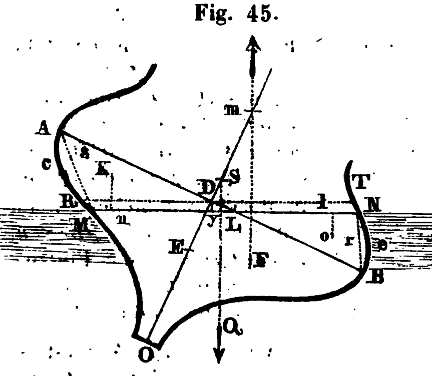


Fig. 45 stelle irgend einen der gedachten Querschnitte (z. B. den größten) dar, wobei AB die Schwimmebene bei aufrechter, MN die bei geneigter Lage des Schiffes bezeichnen mag. Vorerst ist hier zu bemerken, daß der Punct L, in welchem sich letzgenannte Ebenen schneiden, nicht auf die Weise bestimmt werden kann, wie solches in der zweiten Aufgabe des vorigen §. geschah, dadurch nämlich, daß in irgend einem einzelnen Querschnitte Fläche MLA der Fläche BLN gleich angenommen oder gemacht wurde, indem nach gegenwärtiger Voraussetzung das in das

Sodann ist $Be = \frac{a-c}{2}$, $tg.\psi = \frac{h}{Be}$ und $\chi = \psi - \varphi$, folglich wegen $BL : LN = \sin.\chi : \sin.\psi$, $LN = \frac{x \sin.\psi}{\sin.\chi}$, sowie $ML = \frac{(a-x)\sin.\psi}{\sin.(\varphi+\psi)}$. Durch Substitution letzterer beiden Werthe in (1) wird aber x und somit die Lage des Punctes L gefunden.

*) Ueber eine practische Bestimmung von $ES = d$ sehe man den Anhang zu diesem Buche unter Nr. 1.

Wasser und aus dem Wasser getretene Volumen nicht den respectiven Flächen selbst proportional ist, wie solches bei durchaus ähnlich gleichen Figuren der Fall war. Wie verschieden aber auch die gleichliegenden Flächen *AML* und *BLN* in den verschiedenen Querschnitten sein mögen, so wird doch immer noch das zwischen ihnen enthaltene Volumen in der ganzen Längenausdehnung des Schiffes, d. h. das respective aus und in das Wasser getretene Total-Volumen, gleich groß sein.

Auf eine für die Praxis hinreichend genaue Weise kann die Auflösung der fraglichen Aufgabe wie folgt geschehen. Man theile *AB* in zwei gleiche Theile und lege durch den Theilpunct *D* eine Parallelebene *RT* zu *MN*. Der Abstand *DL* muß dann, wie leicht zu ermessen, in allen Querschnitten derselbe sein. Mit Zuziehung von Simpson's Regel berechne man ferner in jedem Querschnitte den Inhalt der Fläche *BDTe* und hieraus das zwischen den Ebenen *BD* und *DT* enthaltene Volumen; auf gleiche Weise ermittele man das zwischen den Ebenen *AD* und *RD* enthaltene Volumen *ADRc*. Ersteres Volumen werde mit p, letzteres mit q bezeichnet, außerdem mag $p > q$ gefunden, auch der Inhalt $= a$ der durch *RT* gelegten horizontalen Schnittfläche bekannt sein. Sodann ergiebt sich $DL = \frac{p-q}{a \sin.\varphi}$, *) wobei φ den Neigungswinkel des Schiffes bezeichnet. Ist aber *L* bekannt, so kann man für jeden Querschnitt die Fläche *LBN*, mithin das ganze eingetauchte Volumen (was hierbei annähernd dem aus dem Wasser getretenen Volumen gleich sein wird) also überhaupt die Größe v der allgemeinen Formeln berechnen.

Um die zweite Größe $nl = b$ zu erhalten, bestimme man in allen Querschnitten die statischen Momente der Flächen *BrNe* und *BLN*; bezogen auf eine durch *L* gelegte Verticalebene, addire solche sämmtlich und dividire die Summe durch v, so giebt der Quotient die Entfernung lL; auf gleiche Weise verfahre man, um Ln aufzufinden, wonach sodann $ln = Ln + Ll$ bekannt ist.

Die Lage des Schwerpunctes *S* hängt sowohl von der Construction als Ausrüstung und Ladung des Schiffes ab, welche Umstände fast immer die Bestimmung der Lage desselben, so-

*) Es sei $fl.BLNe = fl.ALMc = e$, $fl.NLDT = m$, $fl.MLDR = n$, so wird man setzen können $BDTe = e + m$, $ADR = e - n$, folglich die Differenz beider Letzteren, d. i. $MNTR = m + n = u$. Ist Dy der Abstand der Parallelen MN und RT, so folgt auch $u = MN \times Dy = MN \times DL \sin.\varphi$, mithin $DL = \frac{u}{MN.\sin.\varphi}$, woraus der obige Ausdruck leicht abgeleitet werden kann.

wie weiter die Größe $ES = d$ zulassen. Als Annäherungswerth kann man zuweilen $ES = \frac{1}{8}$ der größten Breite des Schiffes, in der Schwimmebene gemessen, annehmen.

Specielle Aufgaben, namentlich Zahlenbeispiele für vorstehende Fälle hier aufzuführen, gestattet der Raum nicht, weßhalb wir auf ausführlichere Werke verweisen müssen. *)

Anmerkung. Nicht ohne Werth und Nutzen möchte es sein, unsere allgemeinen Formeln, §. 36, zur Herleitung der Ausdrücke zu benutzen, welche Tredgold in seinem bekannten Werke: The Steam Engine etc. im Artikel: Steam Navigation, §. 595, ohne gehörigen Beweis aufstellt, auch ohne dabei anzugeben, auf welche besondere Voraussetzung dieselben basirt sind.

Angenommen ist dabei zuerst, daß alle Querschnitte des Schiffes ähnlich gleiche Figuren bilden und die respective aus dem Wasser und in dasselbe getauchten Flächen als ähnlich gleiche Dreiecke betrachtet werden können. Bezeichnet man daher, in Fig. 45, die Breite AB mit e, so ist unser $v = \frac{e^2 \sin.\varphi}{8}$, so wie $b = \frac{1}{2} e$ und nach I. §. 36, wenn $Q = V$ gesetzt wird,

$$(1) \quad M = \tfrac{1}{12} e^3 \sin.\varphi - d.V.\sin.\varphi.$$

Im Betreff der Entfernung $ES = d$, hat Tredgold vorausgesetzt, daß der Schwerpunct S des ganzen Schiffes in der Schwimmebene AB liegt. Da ferner die Begrenzungscurven der Querschnittsflächen als Parabeln angenommen sind, deren Gleichungen die allgemeine Form $y^n = px$ haben, so besteht die Bestimmung von d einfach darin, den rechtwinkligen Abstand des Schwerpuncts der betreffenden Fläche von AB aufzufinden.

§. 39.

Bestimmung der specifischen Gewichte fester und nichtzusammendrückbar flüssiger Körper.

Bezeichnet s das specifische Gewicht eines beliebigen Körpers, P dessen absolutes Gewicht und p das absolute Gewicht eines Wasserkörpers von gleichem Volumen, so erhält man unmittelbar nach §. 27

$$1) \quad s = \frac{P}{p}.$$

Bezeichnet ferner γ die Dichte oder das Gewicht einer Cubikeinheit Wasser und v das vorausgesetzte gleiche Volumen, so ist $p = \gamma v$, also auch

$$2) \quad s = \frac{P}{\gamma v}, \text{ so wie}$$

*) Atwood. A Disquisition on the Stability of Ships; in den Phil. Transact. vom Jahre 1798. p. 287.

3) $P = \gamma s v$, oder, wenn d die Dichte des Körpers P ausdrückt, 4) $P = dv$. Haben sodann für irgend einen anderen Körper die Größen P', p', s', v' und d' dieselbe Bedeutung, so erhält man folgende Proportionen:

$$s : s' = \frac{P}{p} : \frac{P'}{p'} = \frac{P'}{v} : \frac{P'}{v'} \text{ etc., und hieraus}$$

für $v = v'$,

$$5) \; s : s' = P : P',$$

für $P = P'$,

$$6) \; s : s' = v' : v \text{ etc.}$$

Gleichungen und Proportionen, welche sich leicht in Worten ausdrücken lassen.

Zusatz 1. Die Bestimmung specifischer Gewichte fester und nichtzusammendrückbar flüssiger Körper, unter Anwendung der Formeln des vorigen §., macht meistentheils, zur Herleitung der dort vorkommenden Größen, verschiedene Hülfsmittel nothwendig, wovon die hauptsächlichsten die hydrostatische Wage, Glasgefäße (Flaschen) mit eingeschliffenem Stöpsel und die sogenannten Senkwagen (Aräometer) sind.

Die hydrostatische Wage ist nichts anderes als eine doppelarmige gleicharmige Wage von großer Genauigkeit und Empfindlichkeit, die so eingerichtet ist, daß man damit Körper unter Wasser abwägen kann. Zu diesem Zwecke ist unter einer der Schalen ein Häkchen angebracht, woran ein feiner Faden (Draht, Haar) befestigt ist, an welchem der betreffende Körper aufgehangen werden kann.

A. Ist sodann der Körper, dessen specifisches Gewicht bestimmt werden soll, ein fester im Wasser unauflöslicher und zugleich specifisch schwerer als letzteres, so ermittelt man vorerst sein absolutes Gewicht $= P$ in der Luft, sodann am Faden aufgehangen, sein absolutes Gewicht $= q$ im Wasser, wonach zufolge §. 27 das Gewicht des gleichgroßen Wasservolumens $p = P - q$ und nach 1) des vorigen §. das specifische Gewicht erhalten wird zu

$$s = \frac{P}{P - q}.$$

B. Ist der feste Körper specifisch leichter als Wasser, so hat man ihn mit einem anderen Körper mechanisch derartig zu verbinden, daß beide vereint vollkommen ins Wasser tauchen. Das Weitere ergiebt sich aus Folgendem.

Das absolute Gewicht des specifisch schwereren Körpers sei $= P$, das des leichteren $= Q$; im Wasser wiege ersterer $= q$, die Verbindung beider $= W$. Sodann ist für den ersten Körper der Auftrieb $= P - q$, für die Verbindung $P + Q - W$, folglich für den leichteren Körper allein $(P + Q - W) - (P - q) = Q + q - W$, mithin

$$s = \frac{Q}{Q + q - W}.$$

C. Vermag der Körper Wasser in seinen Poren aufzunehmen, so wiegt man ihn zuerst in trockenem Zustande in der Luft, läßt ihn sodann ganz mit Wasser ansaugen, wiegt ihn nochmals, erhält hierdurch das Gewicht des aufgenommenen Wassers, bestimmt endlich seinen Gewichtsverlust im Wasser etc.

D. Löst sich der Körper im Wasser auf, so wendet man eine Flüssigkeit an, in welcher er unauflöslich und deren spec. Gewicht bekannt ist. Durch Ermittelung seines Gewichtsverlustes in gedachter Flüssigkeit und nachheriger Anwendung der Proportion 5) ergiebt sich das spec. Gewicht.

E. Ist das spec. Gewicht einer Flüssigkeit zu bestimmen, so taucht man einen geeigneten festen Körper einmal in diese, ein anderes Mal ins Wasser, worauf man ebenfalls unter Anwendung der Proportion 5) das gesuchte spec. Gewicht erhält. *) Obwohl die hydrostatische Wage streng genommen der genaueste und sicherste Apparat zur Bestimmung der spec. Gewichte, insbesondere fester Körper, genannt werden muß, so verdienen, doch einige andere mindestens hier der Erwähnung, was in nachstehenden Zusätzen geschehen soll.

Fig. 46.

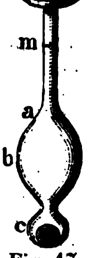


Fig. 47.



Zusatz 2. Aräometer **) (Senkwagen, Schwimmwagen) sind frei schwimmende Körper von entsprechender Gestalt, durch deren Einsenkung in Flüssigkeiten sowohl das spec. Gewicht dieser, als auch fester Körper bestimmt werden kann. Ihr Constructions-Princip beruht entweder auf Proportion 5) oder 6) §. 39 und hiernach nennt man sie Gewichts-Aräometer oder Scalen- (Volumen-) Aräometer.

Will man mittelst dieser Aräometer nur das spec. Gewicht flüssiger Körper bestimmen, so kann man ihnen (nach Fahrenheit) im Allgemeinen die Gestalt von Fig. 46 geben. Dabei ist *ab* ein aus Glas oder Blech verfertigter, hohler, cylinder- oder birnförmiger Körper, der unterhalb eine mit Bleischrot oder Quecksilber gefüllte Kugel *c* trägt, oberhalb auf einem sehr dünnen Halse mit einem Schälchen *d* versehen ist, um Gewichte auflegen zu können. Am gedachten Halse ist ein Zeichen (Marke, Strich) *m* angebracht, bis zu welchem das Instrument beim Gebrauche stets einsinken muß.

Soll dies Aräometer gleichzeitig auch für feste Körper brauchbar sein, so bringt man (nach Nicholsen) statt der Kugel *c* ein Eimerchen *g*, Fig. 47, an, welches zur Aufnahme des zu untersuchenden Körpers dient. Bemerktes Eimerchen läßt sich auch (nach Charles) durch ein Drahtkörbchen ersetzen, wobei sich weniger Luft, ohne gesehen zu werden, anhängen kann.

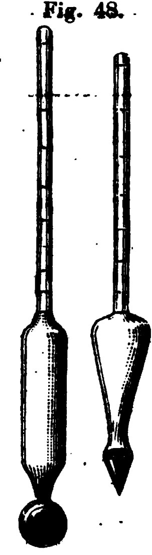
---

*) Ueber die Bestimmung des spec. Gewichtes der Flüssigkeiten mittelst der Wage nach einer neuen Methode, sehe man
Mohr's „Lehrbuch der pharmaceutischen Technik" und hieraus
Pouillet-Müller Physik. Bd. I. S. 94. 2. Auflage.

**) Von ἀραιος locker, dünn und μέτρον Maß.

Zusatz 3. Denkt man sich bei dem Aräometer, Fig. 46, das Schälchen d hinweg, den Hals am verlängert und an diesem eine Scala angebracht, so erhält man die Form der gewöhnlichen Scalen-Aräometer, Fig. 48, die für die Praxis bei weitem wichtiger als die vorbeschriebenen sind.

Fig. 48.



Hierbei kann die Entwerfung der Scala mit Ziehung folgender Rechnung erfolgen:

Es sei P das absolute Gewicht des Aräometers, v das Volumen, um welches dasselbe im Wasser einsinkt, γ das Gewicht der Cubikeinheit des letzteren, so ist zuerst (1) $P = \gamma v$. Senkt man das Instrument in eine Flüssigkeit vom spec. Gewichte $s < 1$ und ist a der Querschnitt des Halses, Fig. 48, b die Einsenkungstiefe in die letztgedachte Flüssigkeit, so erhält man für's Gleichgewicht: $P = \gamma s v + \gamma s a b$ und wegen (1) $P = Ps + \gamma s a b$, woraus (2) $b = \frac{P}{\gamma a}\left(\frac{1-s}{s}\right)$ folgt. Der Querschnitt a kann sodann dadurch bestimmt werden, daß man den Aräometer wieder in Wasser einsenkt, ein Zulagegewicht p beifügt und hierbei die Einsenkungstiefe $= c$ bemerkt, wonach $p = \gamma a c$, folglich $b = \frac{cP}{p}\left(\frac{1-s}{s}\right)$ erhalten wird. Für den Fall, daß $s > 1$, findet sich auf gleichem Wege: $b = \frac{cP}{p}\left(\frac{s-1}{s}\right)$. Endlich ergiebt sich noch:

$$s = \frac{1}{1 + \frac{bp}{cP}}, \text{ wenn } s < 1;$$

$$s = \frac{1}{1 - \frac{bp}{cP}}, \text{ wenn } s > 1.$$

Die Genauigkeit wird um so größer, je bedeutender die Entfernung eines Theilstriches vom andern ist, was zufolge des Werthes b in (1) einen kleinen Querschnitt a, d. h. einen sehr dünnen Hals des Instrumentes voraussetzt.

Von dem Aräometer mit empirischer Scala kann hier nicht die Rede sein. *)

§. 40.

Vorstehenden Paragraphen werde hier eine tabellarische Zusammenstellung spec. Gewichte solcher Körper beigefügt, welche direct und indirect für die technische Mechanik von Wichtigkeit sind.

*) Weiteres über diese Gegenstände findet sich in folgenden Werken: Meißner „Aräometrie etc." Wien 1816. — Baumgartner „Aräometrie für Chemisten u. Technologen." Wien 1820. — Liebig, Handwörterbuch der reinen u. angewandten Chemie. Bd. I. S. 474.

Sobald das Gegentheil nicht angegeben, ist überall eine mittlere Temperatur von 15 bis 20° C., ferner das specifische Gewicht des reinen oder destillirten Wassers = 1 vorausgesetzt.

I. Specifische Gewichte fester Körper. *)

Namen der Körper.	Specifische Gewichte. Grenzen	Mittelwerth
Ahornholz, frisch	0,843 — 0,944	0,893
— lufttrocken	0,612 — 0,750	0,681
Alabaster (körniger Gyps)	2,260 — 2,40	2,330
Anhydrit	2,80 — 3,00	2,900
Antimon	6,656 — 6,860	6,758
Apfelbaumholz, frisch	0,960 — 1,137	1,048
— lufttrock.	0,674 — 0,793	0,733
Basalt	2,415 — 3,30	2,857
Birke, frisch	0,851 — 0,987	0,919
— lufttrocken	0,591 — 0,738	0,664
Birnbaum, lufttrocken	0,646 — 0,732	0,689
Blei	11,207 — 11,445	11,326
Buchenholz (Rothbuche), frisch	0,852 — 1,109	0,980
Buchenholz (Rothbuche), lufttrocken	0,590 — 0,852	0,721
Buchsbaumholz, lufttr.	0,912 — 1,103	0,971
Chloritschiefer	2,70 — 3.0	2,850
Dachschiefer	2,670 — 3,50	3,085
Diorit (Grünstein)	2,790 — 3,0	2,895
Dolerit	2,720 — 2,930	2,825
Dolomit (körniger)	2,80 — 3.0	2,900
Ebenholz (schwarz), lufttr.	1,187 — 1,331	1,259
Eichenholz, frisch	0,885 — 1,062	0,973
— lufttrocken	0,650 — 0,920	0,785
Eis, bei 0°	— —	0,926
Eisen, Stabeisen	7,352 — 7,912	7,600
— Gusseisen, (weiss)	7,056 — 7,889	7,500
— — (grau)	6,635 — 7,572	7,100
— — (halbirt)	6,631 — 7,430	7,100
Erde, Gartenerde	1,630 — 2,338	1,984
Erlenholz, frisch	0,809 — 0,994	0,901
— lufttrocken	0,423 — 0,680	0,551
Eschenholz, frisch	0,778 — 0,927	0,852
— lufttrocken	0,540 — 0,845	0,692
Feldstein-Porphyr	2,430 — 3,389	2,909
Fichtenholz (Rothtanne), frisch	0,794 — 0,993	0,893
Fichtenholz (Rothtanne), lufttrocken	0,376 — 0,481	0,428
Föhrenholz (Kiefer) frisch	0.811 — 1,005	0,908
— — lufttr.	0,463 — 0,763	0,613
Gabbro	2,880 — 3,30	3,090
Glas	2,370 — 3,70	3,035
Glimmerschiefer	2,60 — 3.0	2,800
Gneiss (Gneus)	2,50 — 2,90	2,700
Gold, gegossen	19,258 — 19,50	19,379
— gehämmert	19,361 — 19,650	19,505
Granit	2,50 — 3,063	2,781
Grauwake	?	2,700

Namen der Körper.	Specifische Gewichte. Grenzen	Mittelwerth
Grauwakensandstein	?	2,660
Grünstein (Diabas)	2,770 — 3,080	2,925
Grünstein-Porphyr (Aphanit)	2,80 — 3,10	2,950
Hornblendeschiefer	2,909 — 3,153	3,031
Hornblendefels (-Gestein)	2,90 — 3,10	3,000
Hornstein		
Jakarandaholz, lufttr.	?	0,908
Kalkmörtel	1,638 — 1,859	1,748
Kalkstein	2,0 — 2,720	2,360
Kalk, gebrannt	2,30 — 3,179	2,739
Keupersandstein (dichter)	2,580 — 2,60	2,590
Kieselkalkstein	2,60 — 2,80	2,70
Kieselschiefer	2,50 — 2,80	2,65
Kirschbaumholz, frisch	?	0,982
— lufttr.	0,577 — 0,715	0,646
Klingstein (Phonolith)	2,512 — 2,700	2,606
Kreide (weisse)	?	2,640
Kork	?	0,240
Kupfer	8,580 — 8,950	8,765
Lava	2,348 — 2,880	2,614
Lärchenholz, frisch	0,694 — 0,924	0,809
— lufttrocken	0.473 — 0,565	0.519
Leuzitfels	?	2,80
Lindenholz, frisch	0,710 — 0,878	0,799
— lufttrocken	0,439 — 0,604	0,522
Mahagoni, lufttrocken	0,563 — 1,063	0,813
Marmor (körniger Kalk)	2,516 — 2,862	2,689
Messing	7,820 — 8,730	?
Melaphyr (Augitporphyr)	2,770 — 3,10	2,935
Menschlicher Körper		1,111
Mühlsteinquarz, porös	1,242 — 1,284	1,263
— dicht	2,485 — 2,613	2,549
Nagelfluhe	?	2,090
Neusilber (Argentan)	8,40 — 8,70	8,50
Pappelholz, frisch	0,785 — 0,956	0,857
— lufttrocken	0,353 — 0,591	0,472
Pechstein	2,049 — 2,669	2,359
Pflaumenbaumholz, lufttr.	0,054 — 0,872	0,813
Platin	21,00 — 21,74	21,37
Pockholz, lufttrocken	1,263 — 1,342	1,302
Porphyr	2,70 — 2,80	2,750
Quarzfels (körn. Quarzgestein)	2,560 — 2,750	2,655
Rosskastanienholz	0,551 — 0,610	0,580
Sand, fein und trocken	1,399 — 1,638	1,518
— feucht	1,90 — 1,945	1,922
Sandstein	1,900 — 2,699	2,30
Serpentinfels	2,30 — 2,894	2,597
Speckstein	2,614 — 2,880	2,747

*) Die meisten dieser Angaben sind entweder Karmarsch mechanischer Technologie entnommen, oder durch die besondere Güte dieses meines Herrn Collegen für gegenwärtige Zwecke mitgetheilt worden.

Namen der Körper.	Specifische Gewichte. Grenzen	Mittelwerth
Silber	10,50 — 10,620	10,560
Stahl	7,40 — 8,10	7,70
— cementirt	7,580 — 7,798	7,689
— gefrischt	7,50 — 7,782	7,641
— raffinirt	7,763 — 7,825	7,764
— gegossen	7,826 — 8,092	7,959
Steinkohlen	1,210 — 1,331	1,270
Syenit	2,50 — 3,0	2,750
Tannenholz (weiss), frisch	?	0,894
— lufttrocken	0,455 — 0,746	0,60
Talkschiefer	?	2,74
Thonschiefer	2,60 — 3,50	3,05

Namen der Körper.	Specifische Gewichte. Grenzen	Mittelwerth
Töpferthon	1,80 — 2,00	1,90
Tombak	8,515 — 9,00	?
Trachit (Trapporphyr)	2,40 — 2,60	2,50
Ulmenbaumholz, frisch	0,878 — 0,941	0,909
— lufttr.	0,568 — 0,671	0,619
Weidenholz, frisch	0,715 — 0,855	0,785
Weissbuchenholz, frisch	0,939 — 1,137	0,1038
Ziegelstein, Mauerstein	1,870 — 2,0	1,935
— Klinker	1,520 — 2,290	1,905
Zink	6,850 — 7,30	7,075
Zinn	7,050 — 7,580	7,315

Specifische Gewichte fester Körper mit Rücksicht auf die leeren Zwischenräume derselben.

A. Getreidearten, Sämereien und Hülsenfrüchte. [1]

Getreidearten etc.	Grenzen	Mittelwerth
Weizen	0,707—0,809	0,785
Roggen	0,685—0,788	0,736
Gerste	0,618—0,697	0,657
Dinkel (Spaltgerste)	0,406—0,468	0,418
Hafer	0,430—0,537	0,483
Hirse	0,616—0,695	0,655
Mohnsamen	0,568—0,687	0,627
Leinsamen	0,657—0,758	0,707
Hanfsamen	0,507—0,565	0,536
Kleesamen	0,757—0,854	0,805
Weisse Bohnen	0,841—0,880	0,860
Pferde-Bohnen	0,793—0,838	0,815
Erbsen	0,827—0,879	0,853
Wicken	0,798—0,881	0,839
Kartoffeln, eben gefüllt gemessen	?	0,611
— gehäuft	?	0,833
Weizenmehl, regelmässig eingemessen		0,379
— zusammengerüttelt		0,640

B. Brennmaterialien. [2]

Brennmaterialien.	Grenzen	Mittelwerth
Steinkohlen, englische	0,704—0,797	0,750
Cokes	0,350—0,500	?
Torfziegel [3]), lufttrocken		
weisser oder gelber	0,116—0,[illegible]50	0,183
brauner und schwarzer	0,240—0,600	0,420
Erdtorf	0,562—0,905	0,733
Pechtorf	0,639—1,031	0,835
Torfcokes [4])	0,250—0,300	0,275
Buchenholz [5]) (Rothbuche) in grossen Scheiten	—	0,400
Buchenholz (Rothbuche), sehr trocken, in Knüppel geschnitten, sorgfältig aufgesetzt	—	0,440
Eichenholz, Angabe der Pariser Holzhändler	0,431—0,584	0,501
Eichenholz, 80 Jahre alt, in Scheiten von 1^m Länge und $0^m,05$ — $0^m,15$ Dicke, gewöhnlich geklaftert	—	0,523
Eichenholz, geflösst	—	0,416
Fichtenholz	0,300—0,340	0,320
Tannenholz	0,303—0,380	0,341
Holzkohle, hartes Holz [6])	0,180—0,250	0,215
— weiches Holz	0,130—0,177	0,153

1) Nach Hofrath Wild durch Noback's Taschenbuch der Maas- und Gewichts-Verhältnisse. Seite XXXV. Leipzig 1851.
2) Notizblatt des hannoverschen Architekten- und Ingenieur-Vereins. Bd. II. S. 357.
3) Nach Karmarsch Versuche. Mittheilungen des Gewerbe-Vereins für das Königreich Hannover 1840. Lieferung 21. S. 68.
4) Richard, Aide-Mémoire. Paris 1848. Première Partie, p. 377.
5) Ebendaselbst p. 365.
6) Ebendaselbst p. 366.

C. Baumaterialien.[1])

Baumaterialien.	Mittelwerthe.	Bemerkungen.
Grauwake.		
Steinschlag von 4 Cubikzoll Grösse im Durchschnitt	1,387	Ohne Zwischenräume. für die compacte Gesteinmasse, das specifische Gewicht: = 2,701.
dicht aufgeruthet	1,466	
Keupersandstein.		
Steinschlag von 4 Cubikzoll Grösse durchschnittlich	1,287	Ohne Zwischenräume = 2,584.
dicht aufgeruthet	1,896	
Sand.		
gegraben und feucht . . .	1,174—1,306	Die Zwischenräume des Sandes werden angegeben:
gelagert, im natürlichen Zustande	1,503—1,879	a. von Röder zu 0,302 — 0,384 resp. für feinen und groben Sand. b. von Wolfram 0,388 der ganzen Masse. Das Raumverhältniss zwischen gewachsenen und gegrabenen Boden, aus Lehmsand, Grand und reinem Sand bestehend, fand Bockelberg wie 1 zu 1,281.

Specifische Gewichte mit Wasser vollkommen gesättigter Hölzer.[2])

Holzarten.	Specifisches Gewicht		Zunahme in Procenten		
	trocken	nass	des Volumens	des absoluten Gewichts	des specifisch Gewichts
Laubholz	0,659	1,110	8,8	83	69
Nadelholz	0,453	0;839	5,6	102	91
Eichenholz	0,680	1,125	6;8	77	66
Rothbuchenholz	0,700	1,119	10,9	79	60
Pappel	0,353	1,021	8,5	214	189

II. Specifische Gewichte tropfbarflüssiger Körper.[3])

Alkohol, absoluter, bei 20° C.	0.792	Oele; fette Oele, als Baumöl, bei 12° R.	0,9176—0,9190
Bier, Münchner Lagerbier	1,015 — 1,017	Olivenöl	0,9153
		Leinöl (bei 12° R.)	0,9347—0,9400
Honig	1,450	Mandelöl (bei 15°R.)	0,9180
Milch	1,031	Mohnöl (bei 15° R.)	0,9243—0,9250

1) Versuchsresultate des Herrn Wegbaumeisters Bockelberg in Hannover. Bei Steinschlag von 1,5 Cubikzoll Grösse im Durchschnitte, betrug der Rauminhalt des Steinmateriales 0,5, während der der leeren Zwischenräume 0,5, also ebenfalls die Hälfte des ganzen Volumens wie Oben ausmachte.
2) Nach Weisbach in den polytechnischen Mittheilungen von Volz und Karmarsch. Bd. 2, S. 50. – Ferner empfehlenswerth ist eine betreffende Arbeit des Oberbaurath Laves über das Quellen des Holzes in den Mittheilungen des hannoverschen Gewerbe-Vereins. Jahrgang 1837. Lief. 12. S. 298.
3) Vorzüglich nach Noback a. a. O. Seite XXXVII.

Oele; fette Oele, als Rüböl (bei 15° R.)	0,9130	Spiritus:	
Hanföl	0,9276	absoluter Alkohol $12\frac{4}{5}$° R.	0,7946
Quecksilber. bei 0° . . gegen Wasser, bei 0° (nach Regnault) .	13,59593	von 90% Tralles . .	0,8389
Salzsoole, 26 $\frac{2}{40}$% (nach (Karsten)	1,2046	— 70% — . .	0,8900
Salpetersäure, bei 12° R.	1,522	— 50% — . .	0,9348
Salzsäure, bei 15° R.	1,192	Wein:	
Schwefelsäure, engl., bei $12\frac{1}{2}$° R.	1,850	Bordeauxwein . . .	0,9940
Schwefelsäure, nordhäuser	1,896	Burgunder	0,9915
Schwefelsäure, wasserfreie, bei 20° R. .	1,970	Champagner	0,9620
Seewasser (Meerwasser)	1,020—1,029*)	Hochheimer	0,9890
		Rheinwein, überh. .	0,9925—1,0020
		Madeira	1,0380
		Malaga	1,0150
		Mosel	0,9160
		Portwein	0,9970
		Weisser franz. Wein (Graves)	0,9806
		Franzbranntwein . .	0,9345

Zusatz-Kapitel.

Ausdehnung der Körper durch die Wärme.

§. 41.

Der Erfahrung nach dehnen sich alle Körper beim Erwärmen aus und ziehen sich beim Erkalten zusammen. Die Größe der Ausdehnung und Zusammenziehung, für eine bestimmte Temperatur, ist dabei hauptsächlich von dem Aggregatszustande der Körper abhängig, nämlich kleiner bei festen als bei wasserförmigen, und bei luftförmigen größer als bei jenen beiden. Dehnen sich aber feste und flüssige Körper durch die Wärme nicht nach einerlei Verhältniß aus, so folgt zunächst in Bezug auf die Sätze der letzteren §§. des vorigen Kapitels, daß dieselben auch bei verschiedenen Temperaturen verschiedene spec. Gewichte haben und somit die früheren desfallsigen Bestimmungen eine entsprechende Correction erfahren müssen.

Hat man auch bei gewöhnlichen technischen Untersuchungen nicht gerade nöthig, in aller Strenge hierauf Rücksicht zu nehmen, indem daselbst die Annahme einer mittleren Temperatur gewöhnlich ausreicht, so eignet sich das nähere Eingehen auf diesen

*) Das arithmetische Mittel aus diesen spec. Gewichten ist 1,024 wonach 1 Cubikfuß englisch 62,5 $\times$ 1,024 = 64,0 ℔ wiegt, oder (in Tons à 2240 ℔ engl.): $\frac{64}{2240} = \frac{1}{35}$ Tons, wie meistentheils beim Schiffsbau in England gerechnet wird.

Gegenstand doch in so fern für uns, als wir dabei eine passende Veranlassung finden, andere für den Techniker wichtige Fragen in Betracht zu ziehen.

Wir handeln daher zuerst von der Ausdehnung der Körper im Allgemeinen und kommen sodann (gelegentlich) auf den Temperatureinfluß bei der Bestimmung spec. Gewichte zurück.

Auf der Ausdehnung der Körper durch die Wärme beruhen auch die gewöhnlichen Instrumente, Thermometer, welche man zum Messen der Temperatur verwendet, deren Einrichtung, Verfertigung u. s. w. jedoch hier als bekannt vorausgesetzt werden muß. *)

Zusatz. Um sehr hohe Grade von Wärme zu messen, wo Quecksilberthermometer nicht mehr zu brauchen sind, z. B. den Schmelzpunct der Metalle, die Temperatur eines Porcellanofens u. d. m., bedient man sich eigener Werkzeuge, welche Pyrometer genannt werden. Alle zur Zeit (mir) bekannten Pyrometer sind indeß mehr oder weniger mangelhaft. Man sehe deshalb Munke »Handbuch der Naturlehre«, I. Theil, S. 401. Gehlers »Wörterbuch der Physik«, Artikel: Pyrometer.

Für manche practischen Fälle recht empfehlenswerth dürfte dagegen die Methode (von Parkes) sein, sich Metalllegirungen aus Wismuth, Blei und Zinn und aus Blei und Zinn zu verschaffen, von denen man die Temperaturen kennt, bei welcher sie schmelzen. Begreiflicherweise ist dann für jede Temperatur ein anderes Mischungsverhältniß der Metalle erforderlich. Betreffende Tabellen zur Bestimmung der gedachten Verhältnisse finden sich mitgetheilt im Ersten Bande (1824) der Jahrbücher des k. k. polytechnischen Institutes in Wien, Seite 197 und zwar für Temperaturen von $202^0\,F = 94\frac{4}{9}$ C. bis zur Schmelzhitze des Bleies $612^0\,F = 322\frac{2}{9}{}^0$ C.

§. 42.

Ausdehnung fester Körper durch die Wärme.

Auch die Ausdehnung fester Körper unter sich steht streng genommen in keinem constanten Verhältniß zu den Temperatur–

---

*) Bezeichnet R eine beliebige Anzahl Grade nach Réaumur, C und F respective die correspondirenden nach Celsius und Fahrenheit, so ist

$$R = \frac{4}{5}\,C = \frac{4}{9}\,(F-32);\; C = \frac{5}{4}\,R = \frac{5}{9}\,(F-32);$$
$$F = \frac{9}{4}\,R + 32 = \frac{9}{5}\,C + 32.$$

veränderungen, so daß sich z. B. Kupfer, Eisen, Platin, Glas von 0° bis 300° C. mehr als dreimal so stark ausdehnen als solches von 0° bis 100° C. der Fall ist. Innerhalb der letzsgedachten Grenzen ist indeß der Unterschied so gering, daß die Ausdehnung geradezu der Wärmezunahme proportional gesetzt werden kann.

Aehnlich verhält es sich mit der Frage, ob sich die festen Körper durch die Wärme nach allen drei Dimensionen des Raumes hin um gleich viel ausdehnen, oder nicht. Nach den bisherigen Erfahrungen hierüber, möchte anzunehmen sein, daß ersteres stets dann erfolgt, wenn die Theile (Atome) eines Körpers nach allen Richtungen gleich angeordnet sind, letzteres aber, wenn diese Anordnung nach verschiedenen Richtungen ebenfalls verschieden ist. *)

Bei festen Körpern, wo man die Ausdehnung nach allen Seiten hin gleich groß voraussetzen kann, muß sich aus der Verlängerung nach einer Dimension (der linearen Ausdehnung) die nach zwei oder drei Dimensionen (die kubische Ausdehnung) ohne Weiteres ableiten lassen.

Aus letzterem Grunde ermittelte man bisher, durch Versuche, gewöhnlich nur die lineare Ausdehnung fester Körper, wobei die hierzu angewandten Methoden, im Allgemeinen, in den sorgfältigsten (mikrometrischen) Messungen der Verlängerungen bestanden, welche Stangen, aus den betreffenden Körpern gebildet, bei verschiedenen Temperaturen erfuhren. Ausnahmen hiervon machen allein die Versuche von Dulong und Petit, welche unmittelbar die Ermittelung der kubischen Ausdehnung fester Körper zur Absicht hatten. **)

§. 43.

Bezeichnet man, unter vorgenannten Voraussetzungen, die Ausdehnung der Längeneinheit eines Körpers von 0° bis 100° C. mit a und ebenso die Ausdehnung welche einem einzigen Grad C entspricht (die eigenthümliche oder specifische Längenausdehnung) mit e, so ist $e = \frac{a}{100}$ zu setzen.

---

*) Vollständig erwiesen ist diese Annahme bei den Krystallen, wo man bestimmt weiß, daß sich nur diejenigen nach allen Richtungen gleichmäßig ausdehnen, welche zum regelmäßigen Systeme gehören und keine doppelte Strahlenbrechung zeigen.

**) Ausführlicheres hierüber findet man in den Wörterbüchern der Physik von Gehler und von Liebig im Artikel „Ausdehnung."

Sind daher L_0 und L die Längen eines Körpers respective bei 0^0 und t^0 C, so ist offenbar

$$1)\ L = L_0 + e.L_0 t = L_0 (1 + et)$$

ebenso für einen Körper desselben Stoffes, welcher bei der Temperatur t_1 die Länge L_1 besitzt

$$L_1 = L_0 (1 + et_1),\ \text{woraus}$$

$$\frac{L_1}{L} = \frac{1+et_1}{1+et},\ \text{oder genau genug}$$

$$2)\ L_1 = L[1 + e(t_1 - t)]\ \text{folgt.}$$

Bezeichnen F und F_1 Flächen von Körpern gleichen Stoffes, so ist nach geometrischen Gründen zu setzen: $\frac{F_1}{F} = \frac{L_1^2}{L^2}$, daher

$$\frac{F_1}{F} = \frac{(1+et_1)^2}{(1+et)^2},\ \text{oder ebenfalls hinlänglich genau}$$

$$3)\ F_1 = F[1 + 2e(t_1 - t)].$$

Sind endlich V und V_1 die Volumen gedachter Körper, so erhält man, wegen $\frac{V_1}{V} = \frac{L_1^3}{L^3}$,

$$4)\ V_1 = V[1 + 3e(t_1 - t)];\ \text{oder, wenn}$$

man hier die Ausdehnung der Cubikeinheit, d. i. $3e = K$ setzt,

$$5)\ V_1 = V[1 + K(t_1 - t)].$$

§. 44.

Von den Resultaten der in §. 42 gedachten Messungen stellen wir die Ausdehnungen der für die Mechanik wichtigen festen Körper in folgender Tabelle zusammen.

Die Länge der Körper ist bei 0^0 $C = 1$ gesetzt.

Name der Körper.	Ausdehnung von 0° bis 100° C. ($a. = 100 . e$)		Beobachter.
Blei	0,002719	$\frac{1}{368}$	Morveau.
-	0,002848	$\frac{1}{351}$	Lavoisier u. Laplace.
-	0,003086	$\frac{1}{324}$	Berthoud.
Bronze	0,001817	$\frac{1}{550}$	Smeaton.
Eisen, Stab	0,001167	$\frac{1}{857}$	Bessel.
- -	0,001267	$\frac{1}{790}$	Dulong u. Petit.
- -	0,001220	$\frac{1}{819}$	Lavoisier u. Laplace.
- Draht	0,001140	$\frac{1}{877}$	Troughton.
- Guß	0,001072	$\frac{1}{933}$	Daniell.
- -	0,001109	$\frac{1}{901}$	Roy.
Glas, weißes	0,000861	$\frac{1}{1161}$	Dulong u. Petit.
- -	0,000944	$\frac{1}{1059}$	Herbert.
- Röhren *)	0,000921	$\frac{1}{1085}$	Horner.
- -	0,000776	$\frac{1}{1288}$	Roy.
Gold, feines (de départ)	0,001466	$\frac{1}{682}$	Lavoisier u. Laplace.
Granit	0,000789	$\frac{1}{1267}$	Adie.
-	0,000868	$\frac{1}{1152}$	Bartlett.
Hartloth (2 Kupfer u. 1 Zink)	0,002058	$\frac{1}{486}$	Smeaton.
Kupfer	0,001841	$\frac{1}{543}$	Dulong u. Petit.
-	0,001919	$\frac{1}{521}$	Troughton.
Marmor, weißer (carrarisch)	0,001072	$\frac{1}{932}$	Dunn u. Sang.
- schwarzer	0,000426	$\frac{1}{2374}$	- -
Messing, gegossen	0,001875	$\frac{1}{533}$	Smeaton.
- 0,25 Zink u. 0,75 Kupfer	0,002144	$\frac{1}{466}$	Daniell.
- gewalzt (Tafel)	0,001920	$\frac{1}{510}$	Stampfer.
- Draht	0,001885	$\frac{1}{531}$	Herbert.
Platin	0,000984	$\frac{1}{1016}$	Dulong u. Petit.
Sandstein	0,001174	$\frac{1}{851}$	Adie.
-	0,001716	$\frac{1}{582}$	Bartlett.
Silber	0,002083	$\frac{1}{480}$	Troughton.
- (Kapellen)	0,001910	$\frac{1}{524}$	Lavoisier u. Laplace.
Stahl, Huntsmann'scher	0,001074	$\frac{1}{931}$	Horner.
- Fischer'scher	0,001112	$\frac{1}{899}$	-
- Steyer'scher	0,001152	$\frac{1}{867}$	-
- gehärteter	0,001225	$\frac{1}{816}$	Smeaton.
- b. 30° angelassen	0,001369	$\frac{1}{730}$	Lavoisier u. Laplace.
- b. 65° -	0,001240	$\frac{1}{807}$	- -
- weicher	0,001079	$\frac{1}{926}$	- -
Stein (zum Bau) v. St. Perron	0,000430	$\frac{1}{2324}$	Destigny.
- v. St. Leu	0,000646	$\frac{1}{1541}$	-
Weichloth (1 Zinn u. 2 Blei)	0,002505	$\frac{1}{399}$	Smeaton.
Weißtanne (faserig)	0,000602	$\frac{1}{1644}$	Struve.
- -	0,000408	$\frac{1}{2451}$	Kater.
Ziegelstein (gewöhnlich)	0,000550	$\frac{1}{1818}$	Adie.
Zink, gegossen	0,002968	$\frac{1}{337}$	Horner.
- gewalzt	0,003331	$\frac{1}{300}$	Bessel.

*) Nach Hallström gilt für die lineare Ausdehnung von Röhren aus Kaliglas folgende Formel (die Temperatur in C. Graden)

$$L = 1 + 0{,}00000196\, t + 0{,}000000105\, t^2.$$

Die ungewöhnliche Abweichung mancher dieser Angaben für ein und dasselbe Material, rührt theils von Beobachtungsfehlern, vorzüglich aber (wie bei den Festigkeitscoefficienten und den specifischen Gewichten) von der natürlichen Verschiedenheit der chemischen und physikalischen Zustände der Körper her. Bei sehr sorgfältigen Untersuchungen, z. B. bei größeren geodätischen Vermessungen, Pendelversuchen u. s. w. sieht man sich daher gewöhnlich genöthigt, eigene desfallsige Versuche anzustellen.

Beispiel 1. Die Länge der Stephenson'schen Blechbrücke über die Menai-Straits betrug nach Clark *) bei 0° C. (32° *F*) 1510 Fuß $1\frac{1}{2}$ Zoll, während diese Länge bei $14\frac{4}{9}$ C. (58° *F*) um genau $3\frac{1}{4}$ Zoll größer geworden war. Es fragt sich, wie groß hiernach die eigenthümliche Längenausdehnung ist?

Auflösung. Man erhält hier mittels der Formeln §. 43 sofort:

$$1510{,}3958 = 1510{,}125\,(1 + 14{,}44\,.\,e);\quad \text{d. i.}$$

$$e = 0{,}00001241,$$

also fast unerwartet mit den Werthen der Tabelle §. 44 stimmend.

Beispiel 2. Bei 12° C. beträgt die Länge einer Eisenbahnschiene 18 Fuß; man soll bestimmen, um wie viel sich dieselbe bei 60° C. ausgedehnt haben wird? Letztere Temperatur wurde dadurch ermittelt, daß man in die Schiene Löcher bohrte, diese mit Quecksilber ausfüllte und in letzteres beim stärksten Sonnenschein die Kugeln von Quecksilberthermometer steckte.

Auflösung. Nimmt man nach Lavoisier und Laplace $e = 0{,}00001235$, so ergiebt sich ohne Weiteres:

$$L = 18\,[1 + 0{,}00001235\,.\,48] = 18' + 1\tfrac{1}{2}'''.$$

§. 45.

Ausdehnung nicht zusammendrückbar flüssiger Körper durch die Wärme.

Obwohl für alle flüssigen Körper erwiesen ist, daß sie sich durch die Wärme nach allen Seiten hin völlig gleichmäßig ausdehnen, so lag es doch in der Natur der Sache, daß sich alle deßhalb angestellten Versuche nur auf ihre cubische Ausdehnung beziehen konnten. Auf die Angabe der dabei angewandten Me-

*) The Tabular Bridges, p. 715.

thoden können wir ebenfalls nicht eingehen und verweisen deßhalb wieder besonders auf die bereits citirten Wörterbücher von Gehler und Liebig. Bemerkt mag nur noch werden, daß in dem Nachstehenden allein die (absolute) wahre Ausdehnung der Flüssigkeit in Betracht gezogen ist, d. h. diejenige, welche man beobachten würde, wenn sich das Gefäß, der Behälter der Flüssigkeit, durchaus nicht ausdehnte.

Bei den nicht zusammendrückbar flüssigen Körpern tritt die vorher erwähnte Ungleichförmigkeit der Ausdehnung im Verhältnisse zur Temperatur am meisten hervor und zwar um so bedeutender, je mehr sich die Temperatur dem Puncte nähert, wo die Flüssigkeiten ihren Aggregatszustand ändern. *)

Am wenigsten ungleichförmig unter allen genannten Flüssigkeiten dehnt sich Quecksilber aus, so daß man die Ausdehnung desselben, zwischen 0° und 100° *C* als (beinahe) gleichförmig betrachten kann. Nach den sorgfältigen Versuchen von Dulong und Petit beträgt die cubische Ausdehnung des Quecksilbers für die Temperaturerhöhung von 0° bis 100° *C*: $\frac{1}{55{,}50}$ $= 0{,}018018$, oder für jeden Grad *C*:

$$\frac{1}{5550} = 0{,}00018018.$$

Nächst dem Quecksilber zeigen, innerhalb der Grenzen 0° und 100° *C*, die fetten Oele die wenigste, alle übrigen Flüssigkeiten aber, wie Wasser, Alkohol, Salzlösungen u. s. w., eine um so bedeutendere ungleichförmige Ausdehnung. Für unseren Zweck beschränken wir uns indeß darauf, die neuesten Ergebnisse über die cubische Ausdehnung des reinen Wassers hier noch aufzuführen.

Nach Hallström, gestützt auf eigene Versuche, so wie auf die von Munke und Stampfer, läßt sich das Volumen $= V$ des reinen Wassers, von der Temperatur $= t$, bei 0° $C = 1$ gesetzt, durch folgende Gleichungen ausdrücken: **)

Für Temperaturen von 0° bis 30° *C*,

$$V = 1 - 0{,}000057577\,t + 0{,}0000075601\,t^2 - 0{,}000000035091\,t^3.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich überdies, daß das reine Wasser sein kleinstes Volumen und mithin seine größte Dichte bei + 3,92° *C* besitzt. ***)

---

*) Die Analogie läßt wohl vermuthen, daß sich ein ähnliches Verhältniß auch bei der Ausdehnung fester Körper zeigen würde, wenn man sie bis zum Schmelzpuncte erhitzte.

**) Gehler's physik. Wörterbuch, Artikel „Wärme" S. 913.

***) Nach Desprez (Ann. Ch. Ph. 1840, LXXIII, 296) hat das Wasser seine größte Dichte bei 4° C.

Nach Joule und Plaifair (L. Ed. Ph. Mag. 1847, XXX, 41) bei 3°,945 C.

Für Temperaturen von 30° bis 100° C,

$$V = 1 - 0{,}0000094178t + 0{,}00000533661t^2 - 0{,}0000000104086t^3.$$

Nach diesen Gleichungen läßt sich folgende Tabelle berechnen:

t	Volumen. V	Spec.Gewicht. $\frac{1}{V} = S$	t	Volumen. V	Spec.Gewicht. $\frac{1}{V} = S$
0°	1,000000	1,000000	20	1,001592	0,998411
1°	0,999950	1,000050	30	1,004130	0,995887
2	0,999915	1,000085	40	1,007496	0,992560
3	0,999894	1,000106	50	1,011570	0,988563
3,9	0,9998883	1,0001117	60	1,016398	0,983867
4	0.9998884	1,0001116	70	1,021920	0,978550
5	0,999897	1,000103	80	1,028072	0,972695
10	1,000145	0,999855	90	1,034791	0,966379
18¾	1,001347	0,998655	100	1,042016	0,959678

Zusatz 1. Bezeichnet man mit P_0 und P_t die Gewichte und mit S_0 und S_t die spec. Gewichte eines und desselben Wasservolumens bei den respectiven Temperaturen von 0° und t°, so erhält man nach §. 41 der Geostatik: $P_0 : P_t = S_0 : S^t$, woraus folgt:

$$(1)\ P_0 = P_t \frac{S_0}{S_t} \text{ oder } (2)\ P_t = \frac{P_0 S_t}{S_0}.$$

Von diesen Gleichungen lassen sich nachstehende nicht unwichtige Anwendungen machen:

A) Berechnung des Gewichtes eines hannoverschen Cubikfußes Wasser bei 0° Temperatur.

Das hannoversche Gesetz über Maße und Gewichte (Gesetzsammlung, 1. Abtheilung, Nr. 22, 27 und 32, Jahrgang 1836) giebt nicht direct das Gewicht eines Cubikfußes Wasser an, wohl aber stellt dasselbe fest:

> »daß ein Quartiermaß die richtige Größe hat, wenn das darin enthaltene Wasser, bei einer Temperatur von 15 Grad Réaumur = 18¾ C., 2 Pfund 2½ Loth (= 2 1/64 ℔) wiegt.«

Ferner schreibt dies Gesetz den Fassungsraum eines Himtens zu 1¼ Cubikfuß, einen Himten = 8 Stübchen und 1 Stübchen

$=$ 4 Quartier vor. Hieraus folgt, daß 1 Quartier $= \frac{1}{32}$ Himten $= \frac{1}{32} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{128}$ Cubikfuß beträgt und sonach ist:

$\frac{5}{128}$ Cubikfuß Wasser $= 2\frac{5}{64}$ ℔, d. i. ganz genau

1 Cubikfuß Wasser $=$ 53,20 ℔ Cöln. ($=$ hannov.) bei 15° R.*)

Nach Formel (1) ist dies Gewicht bei 0° Temperatur und mit Bezug auf die vorstehende Tafel:

$$P_0 = 53{,}2 \cdot \frac{1}{0{,}998655} = 53{,}2 \cdot 1{,}001347 = 53{,}27166 \text{ ℔}.$$

B. Berechnung des Gewichtes eines Dresdener Cubikfußes Wasser bei 15° R. $=$ $18\frac{3}{4}$° C., wenn man das Gewicht desselben Volumens bei 0° Temperatur kennt.

Nimmt man das Dresdener Pfund, nach den Bestimmungen der königlichen Münzbeamten, zu 467,0862 Grammes und den Dresdener Fuß nach der beim Zoll- und Steuersystem zum Grunde gelegten Bestimmung $=$ 0,28319 Meter an **), so beträgt das Gewicht eines Dresdener Cubikfußes Wasser bei 0° Wärme: 48,617 ℔.

Mittelst Formel (2) und Zuziehung der berechneten Tabelle ergiebt sich daher:

$$P_t = 48{,}617 \cdot \frac{0{,}998655}{1} = 48{,}5516 \text{ Dresd. ℔ bei } 15° \text{ R.}$$

Hiernach ist der Werth der Seite 16, §. 8, gemachten Angaben zu beurtheilen.

§. 46.

Für fernere Anwendung vorstehender Sätze folgen hier noch einige Aufgaben.

Aufgabe 1. Das specifische Gewicht eines metallnen Körpers ist bei der Temperatur $t = 20°$ C. gegen Wasser $= 1$ von derselben Temperatur bestimmt und $= m$ gefunden; es fragt sich, wie groß dasselbe bei 0° Temperatur sein wird?

Auflösung. Es mögen S und S_1 die spec. Gewichte zweier verschiedener Körper bei Null Grad Wärme und s, s_1 bei einerlei Temperatur $= t$ bezeichnen; ferner V, V_1 und v, v_1 die respectiven Volumen, so wie K, K_1 die Ausdehnungen der Volumeneinheiten.

*) Ueberdies muß bemerkt werden, daß sich diese Bestimmung auf den luftleeren Raum bezieht. Im lufterfüllten Raume beträgt dies Gewicht 53,14 ℔. (Man sehe den Zusatz zu §. 64.)

**) Beim französischen Maßsysteme ist ein Cubikcentimeter destillirtes Wasser im luftleeren Raume bei 4°. C. gleich 1 Gramm bestimmt, oder 1 Cubikdecimeter des dichtesten Wassers $=$ 1 Kilogramm $=$ 1000 Grammes.

Sodann ist $v = VK$, $v_1 = K_1 V_1$ und wegen $v = \frac{VS}{s}$ und $v_1 = \frac{V_1 S_1}{s_1}$, $S = Ks$, $S_1 = K_1 s_1$. Durch Division und Reduction erhält man aber aus letzteren beiden Gleichungen

$$S_1 = \frac{K_1}{K} \cdot \frac{s_1}{s} \cdot S.$$

Setzen wir nun für unseren Fall $S = 1$, so ist $\frac{s_1}{s} = m$ und daher,

$$S_1 = \frac{K_1}{K} \cdot m = \frac{(1+3et)m}{K},$$

wo e die eigenthümliche Längenausdehnung des Metallkörpers bezeichnet.

Nach der Tabelle des vorigen §. ist aber, für $t = 20^0$, $\frac{1}{K} = 0{,}998411$, folglich

$$S_1 = 0{,}998411\,(1 + 3e \cdot t)\,m.$$

Hätte man z. B. das specifische Gewicht des Schmiedeeisens bei 20° C. zu 7,6 gefunden, so würde dasselbe bei 0° C. betragen, wenn $e = 0{,}00001235$ angenommen wird:

$$S_1 = 7{,}618.$$

Aufgabe 2. Die Höhe einer in einem genau cylindrischen Glasgefäße befindlichen Quecksilbermasse ist mit Hülfe einer geeigneten Messingscale, bei der Temperatur t zu h gefunden; es fragt sich, wie groß gedachte Höhe bei 0° Temperatur ist, wenn zugleich auf die Ausdehnung der Scale Rücksicht genommen wird.

Auflösung. Bezeichnet k die kubische Ausdehnung des Quecksilbers für jeden Grad C und h_1 die Höhe dieser Flüssigkeit bei Null Grad Temperatur ohne Rücksicht auf die Ausdehnung der Scale, so ist zuerst nach §. 43: $h = h_1(1 + kt)$.

Geschah die Theilung der Scale bei der Temperatur t_1 und bezeichnet e die eigenthümliche Ausdehnung des Messings, so ist in letzterer Gleichung h_1 durch $\frac{h_1}{1+e(t_1-t)}$ zu ersetzen und folglich mit Rücksicht auf beide Correctionen, die Höhe der auf Null Grad Temperatur reducirten Quecksilbersäule: $h = \frac{h_1(1+kt)}{1+e(t-t_1)}$ und $h_1 = h[1 + e(t_1 - t)]\,(1 - kt)$ genau genug.

Für $h = 0^m,72$ bei $t = -20°$ C. und ferner $t_1 = 16°$ C., so wie $k = 0,00018$, $e = 0,00001875$ ergiebt sich bei 0° Temperatur:

$$h_1 = 0,720487.$$

Aufgabe 3. Eine schmiedeeiserne Stange von $5^m,5$ Länge, $0^m,06$ Breite und $0^m,03$ Dicke, wurde bei der Temperatur + 18° C. mit beiden Enden in zwei unverrückbare Ständer befestigt; man soll die Kraft bestimmen, womit die Stange bei einer Temperaturerniedrigung bis zu — 20°, vermöge des Bestrebens der Zusammenziehung, gegen gedachte Ständer wirkt.

Auflösung. Nimmt man aus der Tabelle §. 44 für Schmiedeeisen die Mittelzahl $a = 0,0012$, also $e = 0,000012$, so würde sich bei der Temperatur-Differenz von 38° C. die freiliegende Stange für jeden Meter ihrer Länge um $0,000012 \times 38 = 0^m,000456$ verkürzen. Da aber letzteres durch die Befestigung der Enden in den Ständern verhindert wird, so müssen diese von einer verhältnißmäßigen Zugkraft angeregt werden, die sich mit Hülfe der Gleichung I. §. 105 Geostatik berechnen läßt. Man erhält nämlich $Q = \frac{\varepsilon}{L} . E . A$ und, da in unserem Falle $\frac{\varepsilon}{L} = 0,000456$, $A = 1800$ und E. (nach Tabelle §. 106 Geostatik) $= 20000$ ist, so folgt

$$Q = 0,000456 . 20000 . 1800 = 16416 \text{ Kil.}$$

Hieraus erkennt man zugleich, wie wichtig es ist, bei Metallconstructionen, Röhrenleitungen, den Schienen der Eisenbahnen, Dampfhähnen und Kolben u. s. w. auf die möglichen Verlängerungen und Verkürzungen Rücksicht zu nehmen, welchen diese bei Temperaturveränderungen unterworfen sind.

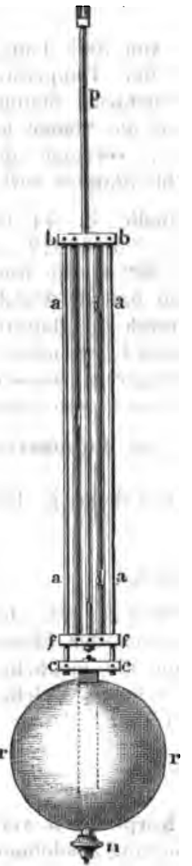
§. 47.

Von der Ungleichheit, mit welcher sich Körper von verschiedenem Stoffe bei gleicher Temperaturveränderung ausdehnen, macht man eine höchst vortheilhafte Anwendung auf die Construction der Uhrpendelcompensationen, worunter man Vorrichtungen versteht, welche dem Einflusse von Wärme und Kälte auf die Längenveränderung der Pendel entgegenwirken. Die Nothwendigkeit einer constanten Länge des Pendels, wenn solches seine Schwingungen stets in gleicher Zeit verrichten soll, erhellt vollständig aus §. 52 bis mit 57 der Geodynamik.

Wir betrachten hier nur zwei der bemerkenswerthesten Compensationen, nämlich die sogenannte Rost- und die Queck-

silber-Compensation. Eine gebräuchliche Anordnung erster Art (ein Rostpendel) zeigt Fig. 48. Dabei ist *p* die schmiedeeiserne Pendelstange, welche an dem oberen Ende derartig aufgehangen ist, daß die ganze Zusammenstellung um eine Axe schwingen kann, welche auf der Bildebene der Figur rechtwinklig steht. *aa* sind zwei gleichfalls schmiedeeiserne Stäbe, deren Enden durch Stifte mit den äußersten Bügeln oder Querstäben *bb* und *cc* fest verbunden sind. *dd* sind zwei Zinkstäbe, welche oberhalb am Querstabe *bb*, unterhalb aber an einem dritten Querstabe *ff* ebenfalls durch Stifte befestigt sind, während durch diesen Querstab *f* die Stäbe *aa* ganz ungehindert hindurch gehen können, weshalb in *ff* entsprechende Oeffnungen gebildet sind.

Fig. 48.



Uebrigens wird das Querstück *ff* von der Pendelstange *p* getragen, welche deshalb in der Mitte von *f* gehörig befestigt ist, während diese Stange *p* durch das obere Querstück *bb* frei hindurch tritt.

Die Linse *r* ist fest mit dem unteren Bügel *cc* verbunden, deren höhere und tiefere Stellen (als anderweitiges Regulirungsmittel) durch eine Stellschraube *n* bewirkt werden kann. Wie durch diese Anordnung die Pendellänge bei constanter Länge zu erhalten ist, wird fast von selbst klar. Dehnt sich nämlich die Pendelstange *p* nach unten aus, so werden die Zinkstäbe *dd* eine nach oben gerichtete Ausdehnung veranlassen, weil sie an der unabhängigen Ausdehnung nach Unten vom Querstücke *ff* gehindert werden (das ja von *p* getragen wird), einer Ausdehnung der Stäbe *dd* nach Oben Nichts entgegensteht, als daß sie dabei gezwungen sind, die Stäbe *aa* und mit ihnen die Linse *r* nach Aufwärts zu ziehen etc.

Die Ausdehnung der Eisenstäbe *a* nach Unten und die größere Ausdehnung der Zinkstäbe nach Oben läßt eine genaue Compensation zu, sobald man die Längen der beiden Gattungen von Stäben entsprechend anordnet.

Um letzteres durch Rechnung zu ermitteln, sei *L* die Entfernung des Schwingungspunctes vom Aufhängepuncte des Pen-

dels, bei einer bestimmten Temperatur, ferner l die Länge der Pendelstange p vom Aufhängepuncte oberhalb bis zum Stege ff, λ die Entfernung des obersten Bügels bb vom Schwingungspuncte der Linse und endlich x die unbekannte Länge der Zink stäbe d. Sodann ist

$$(1)\ L = l + \lambda - x.$$

Bezeichnet ferner e die eigenthümliche Längenausdehnung des Eisens, e_1 die des Zinkes, so ergiebt sich für eine um t Grade höhere oder niedere Temperatur eine neue Länge L_t:

$$L_t = (l + \lambda)(1 \pm et) - x(1 \pm e_1 t).$$

Der Anforderung gemäß muß jedoch $L = L^t$ sein, so daß man die Bedingungsgleichung erhält:

$$(2)\ (l + \lambda)e - xe_1 = 0, \text{ oder wegen } (1)$$

$$(L + x)e - xe_1 = 0, \text{ d. i.}$$

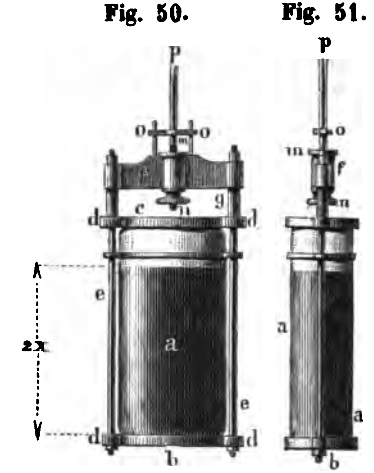
$$(3)\ x = \frac{e}{e - e_1} . L.$$

Aus der Bedingungsgleichung (2) folgt noch der allgemeine Satz für die Compensation:

Die Gesammtlänge der verticalen Stäbe des gegebenen Metalles verhält sich zur Gesammtlänge des compensirenden Metalles umgekehrt, wie die zugehörigen linearen Ausdehnungen.

§. 48.

Eine der einfachsten Compensationen läßt sich mit Anwendung von Quecksilber herstellen (Quecksilberpendel), indem man nämlich an der Pendelstange, statt der Linse, ein mit Quecksilber gefülltes Gefäß (gewöhnlich aus Glas) anbringt. Senkt sich hierbei die Pendelstange, so steigt das Quecksilber auf eine größere Höhe, und bei gehöriger Anordnung läßt es sich leicht erreichen, daß hierdurch der Schwingungspunct eben so viel gehoben wird, als er sich durch die Verlängerung der Pendelstange senkt. Zugleich bietet diese Compensation den Vortheil, daß sich ein damit versehenes Pendel sehr dem einfachen Pendel nähert, da die Masse der Stange im Verhältniß zu der des Quecksilbers sehr gering ist.



Das Specielle der Anordnung eines Quecksilberpendels zeigt Fig. 50 in der Vorder- und Fig. 51 in der Seiten-Ansicht, wobei wohl kaum bemerkt zu werden braucht, daß die Pendelstange *p* verkürzt gezeichnet ist.

Zur Aufnahme des Quecksilbergefäßes *a* und respective zur Verbindung desselben mit der Pendelstange *p* dient ein steigbügelförmiges Gehäuse *bcf*. Es besteht dies aus den Messingtellern *b* und *c*, wovon ersterer als Boden, letzterer als Deckplatte dient. An jedem dieser Teller befinden sich zwei Lappen *dd*, wovon die bei *b* zur Befestigung (mittels Nieten oder Schrauben) der unteren Enden zweier eisernen Tragstangen *ee* dienen, während die Lappen des Tellers *c* gedachte Stangen frei hindurchlassen. Oberhalb werden die Stangen *ee* von den Enden eines Bügels *f* umfaßt, wobei die Hülsen oder röhrenförmigen Fortsetzungen *gg* desselben gleichzeitig zum gehörigen Aufdrücken des Tellers *c* benutzt werden; die Feststellung der gedachten Verbindung wird durch Muttern und Gegenmuttern bewirkt. Um endlich dem Ganzen möglichst viel Stabilität zu geben, ist zwischen *b* und *c* noch ein zweitheiliger durch Nieten vereinigter Ring angebracht. Hinsichtlich der Verbindung der Pendelstange *p* mit dem Bügel *f* wird nur zu bemerken sein, daß von den beiden Schraubenmuttern *m* und *n* die letztere zugleich als weiteres Regulirungsmittel für den Gang der Uhr dient, und zu diesem Ende auf ihrem Rande eine Theilung befindlich ist, *n* also überhaupt eine Mikrometerschraube bildet. Um bei einer solchen Regulirung die Drehung der Pendelstange zu verhindern, ist an dieser das metallene Querstück *o* befestigt, an dem Bügel *f* aber zwei Drähte, welche frei durch die Enden von *o* hindurchgehen.

Zur Berechnung der nothwendigen Dimensions- und Gewichts-Größe des Quecksilberkörpers wollen wir, der Einfachheit wegen annehmen, daß sich der Schwingungspunct des Pendels (nahe genug) in der Mitte des Quecksilberkörpers befindet. *)

*) Welcher Fehler bei dieser Annahme begangen wird, läßt sich leicht nach §. 54 der Geodynamik abschätzen.

Sodann bezeichne L die Entfernung des Schwingungspunctes vom Aufhängepuncte des Pendels, a den Abstand des oberen Endes m des Bügels f von demselben Puncte, b die verticale Höhe des ganzen Gehäuses von m bis zur Platte b gemessen, so wie $2x$ die zu suchende Höhe des Quecksilberkörpers.

Für die bestimmte Temperatur, wobei letztere Größen gemessen sind, erhält man

$$1)\quad L = a + b - x.$$

Für eine um t Grad höhere Temperatur dagegen, wenn e die eigenthümliche Längen-Ausdehnung des Eisens, und $2x^1$ die verhältnißmäßig veränderte Höhe des Quecksilberkörpers bezeichnet

$$2)\quad L^1 = (a + b)(1 + et) - x^1.$$

Wie früher muß aber auch hier $L = L^1$ sein, weßhalb aus 1) und 2) folgt

$$3)\quad o = (a + b)\, et + x - x^1.$$

Um zunächst x^1 zu finden, sei v das Quecksilbervolumen bei der vorherbemerkten Normaltemperatur, k die eigenthümliche kubische Ausdehnung dieser Flüssigkeit, r der innere Halbmesser des auf einen Kreiscylinder reducirten Querschnittes vom Glasgefäße, und e^1 die eigenthümliche lineare Ausdehnung des Glases. Sodann ist anfänglich

$$4)\quad v = r^2 \pi \,.\, 2x, \text{ nachher aber}$$

$$5)\quad v(1 + kt) = \pi r^2 (1 + e^1 t)^2\, 2x^1,$$

Dividirt man 5) und 4), so ergiebt sich

$$(1 + kt) = \frac{(1 + e^1 t)^2 x^1}{x},$$

woraus für x^1 der angenäherte, hinlänglich genaue Werth zu reduciren ist:

$$x^1 = x + x\,(k - 2e^1)\,t.$$

Durch Subst. in 3) erhält man daher

$$0 = (a + b)\, et - x\,(k - 2e^1)\, t \text{ und in Bezug auf (1)}$$

$$0 = (L + x)\; e - x\,(k - 2e^1), \text{ demnach}$$

$$x = \frac{e}{k - 2e^1 - e} \,.\, L.$$

Hier endlich nach Dulong und Petit, zufolge §. 44 u. 45 $e = 0{,}00001182$, $k = 0{,}00018018$ und $e^1 = 0{,}000008613$ gesetzt, giebt

$$x = 0{,}0782 \,.\, L$$

und die ganze Höhe des Quecksilberkörpers

$$2x = 0{,}1564 \,.\, L.$$

Für den besonderen Fall, daß $L = 0^m{,}9935$, ist sonach

$$2x = 0^m{,}1554.$$

Nimmt man hierbei den Querschnitt des Gefäßes = 0,002 Quad. Meter und Quecksilber von spec. Gewichte = 13,560 an, so erhält man für das Gewicht = Q des Quecksilbers:

$$Q = 1000 \,.\, 13{,}56 \,.\, 0{,}002 \,.\, 0{,}1554 = 4{,}214 \text{ Kil.}$$

Eine nach solcher Berechnung angeordnete Quecksilbercompensation macht indeß, für einen sehr genauen Gang der betreffenden Uhr, immer noch das Anbringen anderweitiger Regulirungsmittel nothwendig (in Fig. 50 und 51 die Mikrometerschraube n), was allein schon aus unserer Annahme von ganz bestimmten Ausdehnungscoefficienten erklärbar ist.

In Betreff anderer Compensations- und Regulirungsmethoden muß auf ausführlichere Werke über diese Gegenstände verwiesen werden. *)

---

*) Gehler's Wörterbuch, Artikel „Compensation“ und „Pendel“. Rees Encyclopädie, Artikel Horology, Vol. II, Plate XXXIX and XL. Ganz besonders empfehlenswerth für Practiker ist Jürgen's Werk: „Die höhere Uhrmacherkunst“ Kopenhagen, 1842.

Zweite Abtheilung.

Aërostatik.

---

§. 49.

Die Gleichgewichtsgesetze wasserförmiger Flüssigkeiten und deren Verhalten gegen feste Flächen und Körper, sind auch für luftförmige Flüssigkeiten gültig, insofern dabei auf die §. 2. hervorgehobenen characteristischen Eigenschaften der letzteren Rücksicht genommen wird.

Unter Beachtung gedachter Eigenschaften besteht daher auch in der Aërostatik der Satz von der gleichförmigen Druckfortpflanzung *), der vom Boden- und Wanddrucke, so wie ferner der Satz (das Princip des Archimedes), daß ein von der luftförmigen Flüssigkeit überall umgebener fester Körper so viel an seinem absoluten Gewichte verliert, als das Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeit beträgt.

Vollständige Entscheidung über alle hierher gehörige Fragen werden spätere Paragraphen geben, im Voraus diene zur weiteren Verständigung Folgendes.

Sollen tropfbare Flüssigkeiten Drücke ausüben, so müssen sie der Wirkung der Schwerkraft unterworfen sein, oder es müssen äußere Kräfte auf dieselben einwirken. Bei luftförmigen

---

*) Statt des Wassers oder Oeles zum Betriebe einer hydraulischen Presse könnte daher auch Luft in Anwendung gebracht werden. Die Luft würde nur, bevor sie den auf sie ausgeübten Druck fortpflanzt, so weit zusammenzudrücken sein, bis sie eine der Druckkraft gleiche Spannung angenommen hat. Die Hauptursache, weshalb man bei der gedachten Presse lieber tropfbare Flüssigkeiten als luftförmige zum Druckfortpflanzungsmittel benutzt, liegt hauptsächlich in der Schwierigkeit des nothwendigen Dichthaltens aller betreffenden Theile.

Flüssigkeiten sind für diesen Fall äußere Kräfte nicht erforderlich, vielmehr üben diese schon durch das ihnen innenwohnende stete Ausdehnungsbestreben bestimmte Drücke aus. Vom technischen Standpuncte aus sieht man meistentheils vom absoluten Gewichte luftförmiger Flüssigkeiten ab, so wie man auch den Druck, welchen sie auf die Gefäßwände ausüben, als überall constant betrachtet. Endlich wird gewöhnlich noch angenommen, daß in der ganzen Flüssigkeitsmasse durchaus dieselbe Temperatur statt findet.

Anders ist dies jedoch bei der Betrachtung luftförmiger Flüssigkeitsmassen von beträchtlicher Ausdehnung, wie insbesondere diejenige ist, welche, überall unsere Erde umgebend, die Atmosphäre derselben bildet.

§. 50.

Barometer, Manometer.

Um die Größe der drückenden Kraft (Expansivkraft) in Gefäßen abgesperrter Luft zu messen, benutzt man Instrumente, welche Manometer *) genannt werden, während zu gleichen Zwecken, für die freie atmosphärische Luft, das, hier als bekannt vorauszusetzende, Barometer **) dient.

Beide Instrumente gründen sich auf den bereits von Toricelli (1643) aufgefundenen Satz:

»daß der Druck der Luft tropfbare Flüssigkeiten bis zu Höhen erhebt, welche ihrer Dichte umgekehrt proportional sind.«

Hieraus folgt zugleich, daß das Gleichgewichtsgesetz wasserförmiger Flüssigkeiten in communicirenden Gefäßen auch für luftförmige Flüssigkeiten gültig ist.

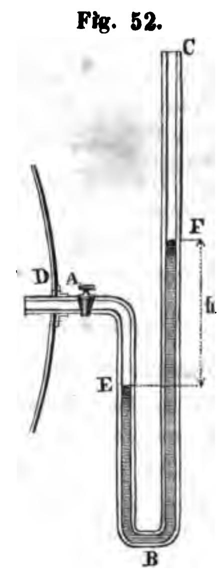
Beim Barometer ist vom communicirenden Gefäße nur ein Schenkel, die oben geschlossene, unten offene, mit Quecksilber gefüllte (und mit der Oeffnung wieder in solches getauchte) Glasröhre vorhanden, während der zweite, unsichtbare Schenkel durch eine Luftsäule von der Höhe der Erdatmosphäre gebildet wird.

---

*) Von μανὸϱ dünn etc.

**) Von βάϱοϱ schwer etc.

Fig. 52.



Beim **Manometer**, Fig. 52, besteht das communicirende Gefäß (gewöhnlich) aus einer Glasröhre *ABC*, in beiden Schenkeln Quecksilber oder Wasser befindlich, wovon der kürzere Schenkel *AB* mit der gepreßten Luft im Gefäße *D*, der längere, oben offene Schenkel *BC* dagegen mit der äußeren atmosphärischen Luft in Verbindung steht. Befindet sich im Gefäße *D* verdünnte Luft, so ist $BF < BE$ etc. *)

§. 51.

Bei einer Temperatur von 0° C. am Spiegel des Meeres und unter mittlerer geographischer Breite beträgt im Barometer die Höhe der Quecksilbersäule, welche den Druck der atmosphärischen Luft mißt $0_m,76$ (= 28 pariser Zoll = 29,92 engl. = 31,23 hannov.)

Nimmt man daher (§. 40) das specifische Gewicht des Quecksilbers zu 13,6, so beträgt dieser Druck $= P$ nach §. 8:

$$P = 1000 \,.\, 13{,}6 \,.\, 0{,}76 \cdot 1 = 10336 \text{ Kil. pr. } \square \text{ Meter,}$$
$$\text{oder } 1{,}0336 \text{ Kil. pr. } \square \text{ Centimeter etc.} ^{**})$$

Die Größe dieses Druckes nennt man den Druck **einer Atmosphäre** und zwar insbesondere in der Beziehung, um denselben als **Maßeinheit** bei der Bestimmung des Druckes

*) Manometer, wobei der längere Schenkel *BC* geschlossen ist, so wie solche, welche aus elastischen Metallen gebildet sind, stehen den beschriebenen an Genauigkeit und Zuverlässigkeit sehr nach und sollen hier (zunächst) unbeachtet bleiben.

**) Es beträgt dieser Druck

pr. □ Zoll	englisch:	14,70 ℔	engl.
„ „	preußisch:	15,05 ℔	preuß.
„ „	hannoversch:	13,08 ℔	hannov.
„ „	sächsisch:	12,29 ℔	sächs.

der Luft und Gase (auch der Wasserdämpfe) überhaupt zu gebrauchen. *)

Durch den Manometerstand, d. h. die Differenz der beiden Flüssigkeitssäulen FB und EB im Manometer, Fig. 52, wird der Druckunterschied der im Gefäße D eingeschlossenen Luft und der atmosphärischen Luft gemessen.

Bezeichnet daher P die innere Pressung, pr. Quadratmeter in Kilogrammen ausgedrückt und p die äußere Pressung auf dieselbe Weise ausgedrückt, endlich h den Manometerstand, so folgt:

$P - p = 1000 . 13{,}6 . h = 13600\, h$, wenn Quecksilber die Manometerflüssigkeit bildet und

$P - p = 1000 . h$, wenn die Manometerflüssigkeit Wasser ist.

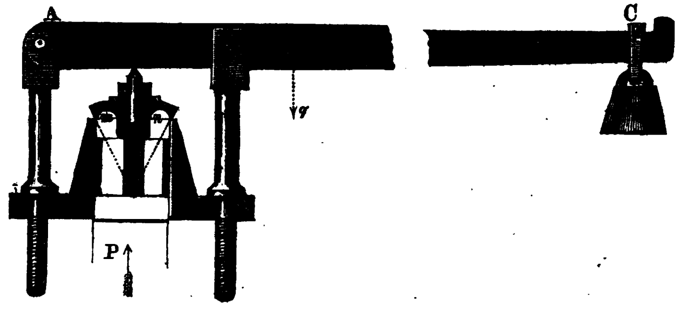
Wenn P und p auf 1 Quadratcentimeter bezogen werden, folgt:

$P - p = 1{,}36 . h$ beim Quecksilbermanometer,

$P - p = 0{,}1 . h$ beim Wassermanometer.

Zusatz. Wie beispielsweise §. 4 bei der hydraulischen Presse für wasserförmige Flüssigkeiten geschah, bestimmt man sehr oft auch die Druckkraft elastischer Flüssigkeiten mit Hülfe eines geeigneten (empfindlichen etc.) Ventiles, Fig. 53.

Fig. 53.



Wird dabei der innere Druck gegen die ganze Ventilfläche mit P, der äußere (einschließlich des Ventilgewichtes) mit p bezeichnet, ferner die Entfernung vom Drehpuncte A des Hebels bis zum Aufhängepuncte eines Gewichtes Q, d. i. $\overline{AC} = L$, $\overline{AB} = l$, $\overline{AS} = \lambda$ gesetzt, letztere Größe als Schwerpunctsentfernung des Hebelgewichtes q vom Drehpuncte A, endlich der resultirende Druck in A mit R, der Zapfen-Reibungscoefficient bei A durch

*) Man beachte hierbei nochmals die Note zu §. 1 und den Zusatz 1. §. 14.

f ausgedrückt, so folgt für den Gleichgewichtszustand, nach bekannten Sätzen vom Hebel:

$$Q L = (P - p)\, l - q\lambda - fR,$$

woraus Q oder L bestimmt werden können, wenn die übrigen Größen gegeben sind.

Beispiel. Wie groß ist das Gewicht Q zu nehmen, welches am einarmigen Hebel eines Sicherheitsventiles aufgehangen werden muß, wenn der Durchmesser der Ventildruckfläche, d. i. $mn = 0^m{,}05$, die innere Pressung 4 Atmosphären beträgt, ferner $L = 1^m{,}0$, $l = 0^m{,}1$, $\lambda = 0^m{,}4$, $q = 7{,}5$ Kil. ist, das Ventilgewicht 1 Kilogramm, und die Zapfenreibung bei A = Null angenommen werden kann.

Auflösung. Hier ist

$$P = 0{,}785 . 5^2 . 1{,}0336 . 4 = 81{,}1376 \text{ Kil.}$$

$$p = \frac{P}{4} + 1 = 21{,}2844 \text{ Kil., also}$$

$$l(P - p) = 5{,}985 \text{ und}$$

$$Q = \frac{5{,}985 - 7{,}5 . 0{,}4}{1{,}0} = 2{,}985 \text{ Kil.}$$

§. 52.

Mariotte-Boyle's und Gay-Lussac's Gesetz.

Von besonderer Wichtigkeit ist für alle weiteren Betrachtungen das Gesetz, welches die Beziehung zwischen Elasticität, Dichte und Volumen der Luft ausdrückt und welches fast gleichzeitig von dem Engländer Boyle (1660) und dem Franzosen Mariotte (1670) aufgefunden wurde. Es lautet dies Gesetz folgendermaßen:

»Die Elasticität und Dichtigkeit der Luft ist der sie zusammendrückenden Kraft direct, das Volumen, oder der Raum, den sie einnimmt, dieser Kraft umgekehrt proportional, vorausgesetzt, daß die Temperatur constant bleibt.«

Hat man daher zwei Luftvolume v und v_1 von gleicher Temperatur, deren respectiven Pressungen p und p_1, so wie Dichten η und η_1 sind, so stellt sich das Mariotte-Boyle'sche Gesetz durch folgende Proportionen dar:

$$(1) \quad \begin{cases} p : p_1 = v_1 : v; \\ p : p_1 = \eta : \eta_1; \\ v : v_1 = \eta_1 : \eta. \end{cases}$$

Ein zweites wichtiges Gesetz, betreffend die Ausdehnung der Luft durch Wärme, ist das Gesetz Gay-Lussac's (Daltons), was also lautet:

»Trockne atmosphärische Luft dehnt sich bei gleichem Temperaturzuwachse um gleich viel und zwar für jeden Grad des hunderttheiligen Thermometers um 0,00375 ihres Volumens aus, vorausgesetzt, daß der Druck, unter welchem diese Luftmasse steht, sich nicht verändert.«

Die neuesten Bestimmungen (von Magnus und Regnault) weichen hiervon etwas ab, insbesondere beträgt die gedachte Volumenausdehnung $= \delta$ für jeden Grad des Intervalls von 0° bis 100° C., nur:

$$\delta = 0{,}003670.$$

Bezeichnet v_0 ein Luftvolumen von 0° Temperatur, so erhält man für die Voluminas v und v_1 bei t und t_1 Temperatur:

$$v = v_0 (1 + \delta t) \text{ und } v_1 = v_0 (1 + \delta t_1)$$

und hieraus:

$$(2) \quad \frac{v}{v_1} = \frac{1 + \delta t}{1 + \delta t_1}.$$

Aus der Verbindung des Mariotte'schen mit dem Gay-Lussac'schen Gesetze ergeben sich noch folgende besonders wichtige Gleichungen:

$$(3) \quad \frac{v}{v_1} = \frac{p_1}{p} \cdot \frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t}$$

$$(4) \quad \frac{\eta}{\eta_1} = \frac{p}{p_1} \cdot \frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t}.$$

Anmerkung. Die jüngsten Arbeiten Regnaults *) zeigen, daß das Mariotte-Boyle'sche Gesetz weder für die sogenannten unbeständigen Gase, wie Kohlensäure, Ammoniak, Cyan etc., noch auch für die beständigen (?) wie atmosphärische Luft, Stickgas und Wasserstoffgas, in aller Strenge Gültigkeit besitzt. Der genannte Physiker hat seine Versuche bis auf 36 Atmosphären Druck ausgedehnt.

Innerhalb der Grenzen, worin sich der Techniker zu bewegen hat, wird man indeß das Mariotte'sche Gesetz, mindestens für atmosphärische Luft, als vollständig gültig annehmen dürfen, indem die Versuche Dulong's und Arago's **) die Richtigkeit desselben

---

*) Mémoire de l'Académie royale de sciences de l'Institut de France, Tome XXI, p. 329, Paris 1847. — Karsten, Fortschritte der Physik, II. Jahrg., S. 88.

**) Annales de physique et de chimie, 1830.

bis zu Druckkräften von 27 Atmosphären darthut. Eben so zeigen Regnault's Versuche *) über Ausdehnung elastischer Flüssigkeiten, daß der Gay-Lussac'sche Satz von der Gleichheit der Ausdehnungscoefficienten für alle Gase nicht streng richtig ist und am meisten abweicht, je größer die Pressungen sind, unter welchen sich die Gase befinden und je größer ihre Dichtigkeit ist. Unter constantem Drucke fand Regnault:

Für Wasserstoffgas $\delta = 0{,}003661$;
„ atmosph. Luft $\delta = 0{,}003670$;
„ kohlensaures Gas $\delta = 0{,}003910$;
„ schwefligsaures Gas $\delta = 0{,}003903$.

§. 53.

Das Gewicht eines Liters trockener atmosphärischer Luft bei 0° C. Temperatur, unter der Pressung von 0m,76 und unter 45° Breite (für Paris) beträgt nach Regnault:

1,293187 Gramme, folglich
1 Cubikmeter = 1,293187 Kilogramm. **)

Für die Breite φ und h Meter über dem Meere, beträgt dies Gewicht

$$1{,}292673 \frac{1}{1 + \frac{2h}{r}} [1 - 0{,}002837 \cdot \cos 2\varphi],$$

wobei der mittlere Erdradius

$r = 6366198$ Meter gesetzt werden kann.

(Regnault a. a. O. p. 158.)

Für Metermaße erhält man, mit Zuziehung der Formel (4) §. 52 folgenden höchst brauchbaren Ausdruck um das Gewicht eines Cubikmeters Luft bei beliebiger Temperatur $= t$ und beliebiger Pressung $= P$, sobald P überdies den Druck in Kil. pr. □ Meter bezeichnet:

$$\eta = 1{,}293187 \frac{P}{10336} \cdot \frac{1}{1 + \delta t} \text{ oder}$$

$$\text{I. } \eta = \frac{P}{7992{,}655} \cdot \frac{1}{1 + \delta t}.$$

Ein zweiter Ausdruck, für die Folge von besonderer Wichtigkeit, ist nachstehender:

$$\text{II. } \frac{P}{\eta} = 7992{,}655\,(1 + \delta t) = k.$$

*) a. a. O. p. 119.

**) 1 hannov. Cubikfuß atmosph. Luft von 0° Temperatur wiegt hiernach: 0,0689057 ℔ = 2,2049814 Loth hannov.

Den Regnault'schen Untersuchungen (a. a. O. p. 162) entnehmen wir ferner noch, daß das Gewicht γ eines Cubikmeters Wasser, im Maximum seiner Dichte $\gamma = 1000$ Kil. und das Gewicht q eines Cubikmeters Quecksilber bei 0° Temperatur $q = 13595{,}93$ Kil. beträgt, folglich auch ist:

$$\text{III.} \begin{cases} \dfrac{q}{\eta} = 10513{,}5 \text{ für Paris:} \\ \dfrac{q}{\eta} = 10517{,}3 \text{ für den Meeresspiegel.} \end{cases}$$

$$\text{IV. } \frac{\gamma}{\eta} = 773{,}23.$$

Beispiel. In einem (unausdehnsamen) überall geschlossenen Gefäße befindet sich ein Luftvolumen von der Spannkraft einer Atmosphäre und einer Temperatur von 12° C., es fragt sich, bis auf welche Temperatur diese Luft erhitzt werden muß, damit sie die doppelte Pressung, d. h. die von 2 Atmosphären, zeigt?

Auflösung. Setzt man in (3) §. 52 $v = v_1$, $p = 2p_1$, und $t_1 = 12°$, so ergiebt sich

$$t = 296{,}48 \text{ Grad.}$$

Anmerkung. Um das Gewicht eines gegebenen Volumens feuchter atmosphärischer Luft zu berechnen, kann man wie folgt verfahren.

Es sei P die Pressung des Gemenges von Luft und Wasserdampf bei der Temperatur $= t$, Y die Pressung des Wasserdampfes und folglich $P - Y$ die der Luft allein. Ferner sei m das Dichtigkeitsverhältniß des Wasserdampfes gegen atmosphärische Luft von gleicher Temperatur und Pressung.

Für die Dichtigkeit η_1 der trockenen Luft im Gemenge erhält man sodann nach (1) §. 52

$$\eta_1 = \eta \frac{P-Y}{P};$$

so wie für die Dichtigkeit $= \Delta$ des Wasserdampfes im Gemenge:

$$\Delta = m\eta \frac{Y}{P},$$

daher, nach Dalton's bekanntem Gesetze *), die Dichtigkeit $= X$ der vorausgesetzten feuchten Luft:

$$X = \eta \left\{ \frac{P-Y}{P} + m \frac{Y}{P} \right\}, \text{ d. i.}$$

$$X = \eta \left\{ 1 - (1-m) \frac{Y}{P} \right\}.$$

*) Pouillet's Physik. Bd. 2. §. 136. 1. Auflage.

Weil jedoch der in der Luft vorhandene Wasserdampf selten im Maximo seiner Dichte vorhanden ist, werde nur die Hälfte von $1-m$ in Rechnung gebracht, weshalb man für V Cubikmeter solcher Luft bei t Temperatur und unter P Pressung mit Bezug auf §. 53 erhält:

$$X = 1{,}293187 \frac{P}{10336} \cdot \frac{1}{1+\delta t} \left\{ 1 - \frac{(1-m)}{2} \frac{Y}{P} \right\} V.$$

Streng genommen ist m mit der Temperatur (nach §. 54 veränderlich). Gewöhnlich setzt man jedoch, mit Holtzmann, für Dampf von 100° Spannung $m = 0{,}6207$ oder nach Gay-Lussac $m = 0{,}625 = \frac{5}{8}$, daher endlich:

$$X = 1{,}293187 \frac{P}{10336} \frac{1}{1+\delta t} \left\{ 1 - \frac{3}{16} \frac{Y}{P} \right\} V.$$

§. 54.

Wasserdämpfe.

Hier werde vorerst der auch technisch höchst wichtige Unterschied zwischen gesättigten Dämpfen, oder solchen im Maximum ihrer Dichte, und zwischen nicht gesättigten Dämpfen hervorgehoben.

Bei der einen Gattung (gesättigter) Dämpfe ist Spannung und Dichte nicht von dem Volumen, sondern einzig und allein von der Temperatur abhängig. Wenn bei diesen Dämpfen die Temperatur constant bleibt und genug Flüssigkeit zur Bildung neuer Dämpfe vorhanden ist, wird zwar eine Raumvergrößerung die sofortige Erzeugung neuer Dämpfe zur Folge haben, allein wenn sich dieser Raum ganz mit Dampf der entsprechenden Temperatur gefüllt (gesättigt) hat, wird Spannung und Dichte genau wieder die ursprünglich vorhandene sein. Bei Verminderung des Raumes schlägt sich genau eben so viel Dampf nieder, als erforderlich ist, um Spannung und Dichte abermals der unveränderlich gelassenen Temperatur proportional zu machen.

Erhöht man endlich die Temperatur und läßt den Raum unverändert, so erzeugt sich ebenfalls neuer Dampf, aber auch nur so viel als nöthig ist, um gedachten Raum damit zu sättigen, d. h. wiederum jenes bestimmte Verhältniß zwischen Temperatur und Spannung herzustellen.

Derartige Dämpfe befinden sich im Maximum ihrer Dichte, es sind gesättigte Dämpfe, und es folgen dieselben dem Mariotte'schen Gesetze gar nicht.

Bei der Gattung, d. h. den nicht im Maximum ihrer Dichte befindlichen (den nicht gesättigten) Dämpfen, hängen dagegen Spannkraft und Dichte in der von dem Mariotte'schen Gesetze ausgesprochenen Bedingungen von einander ab.

Im Nachstehenden und in der Folge ist stets von Dämpfen im Maximum der Dichtigkeit die Rede, wenn das Gegentheil nicht besonders ausgesprochen wird.

Bezeichnet e die Höhe der Quecksilbersäule in Millimetern, welche die Pressung des Dampfes bei der von 0° C. an gezählten Temperatur t ausdrückt, so ist nach Holtzmann *) (bis auf die Coefficienten mit Magnus stimmend)

$$e = 4{,}529 \,.\, 10^{\frac{7{,}4804.t}{236{,}22+t}} \text{ oder}$$

$$log \frac{p}{p_0} = \frac{5{,}2555\,\tau}{336{,}22+\tau},$$

wenn τ vom Siedepuncte aus gerechnet wird, p_0 den Atmosphären und p den Dampfdruck bezeichnet.

Nach diesen Formeln berechnete Werthe stimmen derartig mit den Beobachtungsresultaten überein, daß man berechtigt wird, dieselben als die mathematischen Ausdrücke des Naturphänomens selbst anzusehen (?).

Zwei andere in der Technik besonders bekannte Gleichungen, nach einer von Young adoptirten Form, sind

$$p = \left(\frac{75+t}{174}\right)^6,$$

[von Mellet-Tredgold] für 1 — 4 Atmosphären, und

$$p = (0{,}28658 + 0{,}0072003\,t)^5,$$

[von Dulong und Arago] für 4 — 50 Atmosphären mit der Erfahrung stimmend.

In beiden bezeichnet p den Druck des Dampfes in Kilogrammen pr. Quadratcentimer und t die Temperatur in Centigraden.

Nimmt man mit Holtzmann das Gewicht eines Cubikmeters Wasserdampf bei 100° C. und unter 1,0336 Kilogr. Pressung pr. Quadratcentimeter, zu 0,588 Kil., den Ausdehnungscoefficient $\delta_1 = 0{,}004233$ an, so ergiebt sich mittels Formel (4) §. 52

$$\eta = \frac{0{,}8096.p}{1+0{,}004233.t}\text{ Kil.,}$$ wenn p in Kil. pr. □ Centimeter ausgedrückt und

$$\eta = \frac{0{,}00008096p}{1+0{,}004233\,t},$$ wenn p ebenso auf den □ Meter bezogen wird.

Aus letzterer Gleichung reducirt man ferner:

$$\frac{p}{\eta} = k_1 = 12350\,(1+\delta_1 t).$$

Zusatz. Diejenige Wärmemenge des gesättigten Wasserdampfes, welche gebunden (latent) in demselben enthalten, oder zu seiner Constituirung erforderlich ist, wird immer noch verschieden angegeben. Regnault räth, auf seine Versuche gestützt, provisorisch für die Gesammtwärme $= \lambda$ (d. h. der Summe der freien und gebundenen) die Formel

*) Ueber die Wärme und Elasticität der Gase und Dämpfe. Mannheim 1845. S. 21.

$$\lambda = 606,5 + 0,305\,t$$

(wo t in Centesimalgraden ausgedrückt und von 0° an zu zählen ist) so lange als Ausdruck des Gesetzes der Erscheinung anzunehmen, bis ein tieferes Studium der Eigenschaften des Dampfes die Aufstellung der wahren physischen Gründe erlauben werde.

Anmerkung. Wir schließen gegenwärtigen §. mit Anführung nachstehender von Holzmann nach den oben angegebenen Formeln berechneten Tabelle.

Tafel

der grössten Spannkraft und Dichtigkeit des Wasserdampfes.

Temperatur in Graden des hunderttheiligen Thermometers.	Grösste Spannkraft in Quecksilberhöhe.	Grösste Spannkraft in Atmosphären.	Druck des Dampfes auf einen Quadratcentimeter.	Gewicht von 1 Kubikmeter Dampf.	Volum von 1 Kilogr. Dampf.
Grade	Millimeter		Kilogramm	Kilogramm	Kubikmetr
— 20,0	0,92	0,00121	0,00125	0,00111	902
— 15,0	1,41	0,00185	0,00191	0,00166	602
— 10,0	2,12	0,00279	0,00288	0,00244	409
— 5,0	3,12	0,00410	0,00424	0,00353	284
+ 0,0	4,53	0,00596	0,00615	0,00500	200
5,0	6,49	0,00852	0,00881	0,00700	143
10,0	9,12	0,0120	0,0124	0,00966	104
15,0	12,7	0,0167	0,0172	0,0132	76,0
20,0	17,4	0,0229	0,0236	0,0177	56,7
25,0	23,6	0,0310	0,0320	0,0235	42,5
30,0	31,6	0,0416	0,0430	0,0309	32,3
35,0	41,9	0,0551	0,0569	0,0402	24,8
40,0	54,8	0,0721	0,0745	0,0518	19,3
45,0	71,3	0,0938	0,0968	0,0660	15,2
50,0	91,8	0,1210	0,1250	0,0836	12,0
55,0	117,0	0,1540	0,1590	0,1050	9,54
60,0	148,0	0,1950	0,2010	0,130	7,67
65,0	187,0	0,2450	0,2540	0,161	6,21
70,0	232,0	0,3050	0,3160	0,198	5,06
75,0	288,0	0,3780	0,3910	0,241	4,15
80,0	354,0	0,4660	0,4810	0,292	3,43
85,0	432,0	0,568	0,586	0,351	2,85
90,0	525,0	0,690	0,713	0,419	2,39
95,0	632,0	0,832	0,859	0,498	2,01
100	760	1,000	1,03	0,588	1,70
101	789	1,03	1,07	0,609	1,64
102	818	1,07	1,11	0,629	1,59
103	847	1,11	1,15	0,650	1,54
104	877	1,15	1,19	0,671	1,49
105	908	1,19	1,23	0,694	1,44
106	940	1,24	1,28	0,716	1,40
107	973	1,28	1,32	0,741	1,35

Temperatur in Graden des hunderttheiligen Thermometers.	Grösste Spannkraft in Quecksilberhöhe.	Grösste Spannkraft in Atmosphären.	Druck des Dampfes auf 1 Quadratcentimeter.	Gewicht von 1 Kubikmeter Dampf.	Volum von 1 Kilogr. Dampf.
Grade	Millimeter		Kilogramm	Kilogramm	Kubikmetr
108	1010	1,32	1,37	0,764	1,31
109	1040	1,37	1,42	0,788	1,27
110	1080	1,42	1,47	0,813	1,23
111	1120	1,47	1,52	0,839	1,19
112	1160	1,52	1,57	0,865	1,16
113	1200	1,57	1,63	0,892	1,12
114	1240	1,63	1,68	0,920	1,09
115	1280	1,68	1,73	0,948	1,05
116	1320	1,73	1,79	0,978	1,02
117	1360	1,79	1,85	1,01	0,995
118	1410	1,58	1,91	1,04	0,966
119	1450	1,91	1,97	1,07	0,938
120	1500	1,97	2,04	1,10	0,911
122	1600	2,10	2,17	1,16	0,860
124	1710	2,24	2,32	1,23	0,812
126	1820	2,39	2,47	1,30	0,767
128	1930	2,54	2,62	1,38	0,725
130	2050	2,70	2,79	1,46	0,686
132	2180	2,86	2,96	1,54	0,649
134	2310	3,04	3,14	1,63	0,614
136	2450	3,23	3,33	1,72	0,582
138	2600	3,42	3,53	1,81	0,551
140	2750	3,62	3,74	1,91	0,524
142	2920	3,84	3,96	2,01	0,497
144	3080	4,06	4,19	2,12	0,472
146	3260	4,29	4,43	2,23	0,449
148	3440	4,53	4,68	2,34	0,427
150	3640	4,79	4,94	2,45	0,407
152	3850	5,06	5,22	2,58	0,388
154	4060	5,33	5,51	2,70	0,370
156	4280	5,62	5,81	2,84	0,352
158	4510	5,93	6,12	2,98	0,336
160	4750	6,25	6,46	3,13	0,320
162	5000	6,58	6,79	3,28	0,305
164	5260	6,92	7,15	3,43	0,292
166	5530	7,28	7,52	3,59	0,279
168	5820	7,66	7,91	3,76	0,266
170	6120	8,05	8,32	3,94	0,254
172	6430	8,45	8,73	4,11	0,243
174	6740	8,87	9,16	4,30	0,233
176	7080	9,31	9,62	4,50	0,222
178	7430	9,77	10,10	4,70	0,213
181,60	7600	10,00	10,335	4,73	0,211

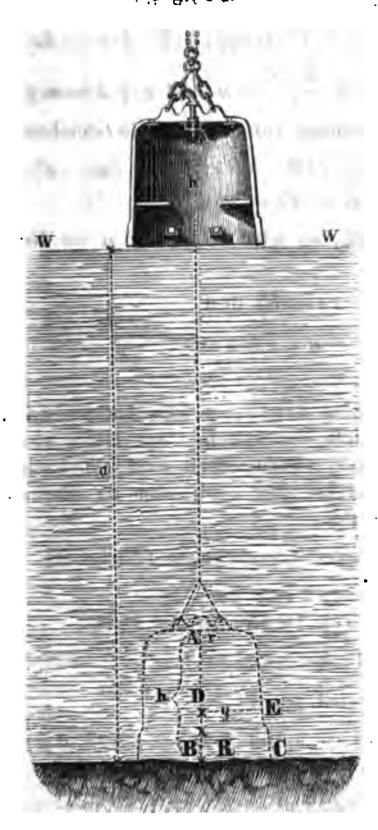
§. 55.

Taucherglocke.

Mit diesem technisch höchst bedeutsamen Apparate werde eine Reihe von Betrachtungen in der Form von Aufgaben eröffnet, die zur Anwendung der bis hierher aufgeführten Gesetze der Aerostatik dienen.

Bei der Taucherglocke, Fig. 54, soll zuerst die Frage beantwortet werden, bis zu welcher Höhe $DB = x$ Wasser in dieselbe dringt, wenn ihre Dimensionen, so wie die Tiefe $= a$ bekannt ist, in welcher sie unter dem Oberwasserspiegel aufgestellt ist. Gedachter Fall kann eine Beachtung erfordern, wenn durch ungünstige Umstände veranlaßt, die Druckpumpe (Compressionspumpe) eine Zeit lang außer Thätigkeit gesetzt ist, mittels welcher sonst durch die Oeffnung A in elastischen Röhren (Schläuche) frische zum Einathmen der Arbeiter geeignete Luft eingeführt wird, die auch zugleich das Wasser aus der Taucherglocke entfernt.

Fig. 54.



Des ersten Verständnisses wegen werde angenommen, daß die Taucherglocke einen mit der Grundfläche parallel abgekürzten Kegel bildet (wie beispielsweise eine bei den Hafenarbeiten in Cherbourg benutzte Taucherglocke *), dessen Höhe h ist, während R und r die Radien der kreisförmigen Endflächen sind. Die den Atmosphärendruck messende Wassersäule werde b ($= 10^m,336$) und der veränderliche Radius der Glocke $DC = y$ gesetzt.

*) Bulletin d'encouragement, 19 Année (1820), p. 198, Pl. 193. Andere Taucherglocken (gußeiserne mit fast rectangulären Querschnitten) finden sich beschrieben und abgebildet in folgenden Werken: Armengaud Publication Indust. 4e Vol., Pl. 7.

Da die Volumina's der in der Glocke befindlichen Luft

über dem Wasser: $\frac{h\pi}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$,

in der Tiefe a: $\frac{(h-x)\pi}{3}(y^2 + r^2 + ry)$ sind,

ferner auch

$$y = R - \frac{R-r}{h} \cdot x \text{ ist,}$$

so erhält man nach dem Mariotte'schen Gesetze die Proportion:

$$b : (a + b - x) = (h - x)(y^2 + r^2 + ry) : h(R^2 + r + Rr).$$

Wird hier $h(R^2 + r^2 + Rr) = k$, $\frac{R-r}{h} = n$ und $a + b = m$ gesetzt, so erhält man zur Bestimmung von x folgende Gleichung:

$$\text{I. } (R - nx)^2 (h - x)(m - x) + r(R - nx)(h - x)(m - x) + r^2 (h - x)(m - x) = bk.$$

Bildet die Glocke einen Cylinder, so wird $R = r$, $n =$ Null, $k = 3hr^2$, folglich aus I:

$$(h - x)(m - x) = bh \text{ und}$$

$$x = \frac{a + b + h}{h} \pm \sqrt{\left(\frac{a + b + h}{2}\right)^2 - ah}.$$

Hinsichtlich der mechanischen Arbeit, welche aufzuwenden ist, um die Luft bei a Wassertiefe der Glocke, mit Hülfe einer Druckpumpe (Compressionspumpe) auszutreiben und gleichzeitig diese Luft zum Einathmen für die Arbeiter geeigneter zu machen, muß auf [§. 59] verwiesen werden.

Beispiel. Bei der erwähnten Cherbourger Glocke ist

$h = 1^m{,}594$; $R = 0^m{,}8805$; $r = 0^m{,}8075$;
$a = 15^m{,}0$, also $m = 15 + 10{,}336 = 25^m{,}336$;
$n = \frac{R-r}{h} = 0{,}045797$; $k = 3{,}40623$;
$b = 10^m{,}336$. Daher wird aus I:

$0{,}00209734\,x^4 - 0{,}1741092\,x^3 + 5{,}39072\,x^2 - 62{,}3350\,x +$ 51,14[illegible]3 $= 0$, oder

$$x^4 - 83{,}0137\,x^3 + 2570{,}26235\,x^2 - 29720{,}9482\,x + 24387{,}6673 = 0, \text{ woraus}$$

$$x = 0^m{,}88661.$$

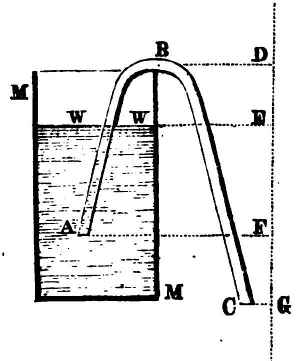
— Papers of Royal Engineering, Vol. I., Pl. XV — XX. — Hagen Wasserbaukunde.

§. 56.

Heber.

Es ist die Kraft zu bestimmen, womit in einem beliebigen Gefäße *MM*, Fig. 55, enthaltenes Wasser zum Abfließen durch einen Heber *ABC* angetrieben wird. Vorausgesetzt wird dabei, daß die Zusammenstellung überall von der atmosphärischen Luft umgeben ist, das Gefäß eben so viel Zufluß erhält, als durch den Heber abfließt, der Spiegel *WW* also constant bleibt, endlich beide Heberschenkel bereits mit Wasser gefüllt sind, auch *C* vor dem Beginnen des Ausfließens zugehalten wird.

Fig. 55.



Auflösung. Bezeichnet, wie vorher, *b* die den Atmosphärendruck messende Wassersäule ($10^m,336$), so erfährt die Einheit der Fläche (wenn man zuvor die Horizontalen durch *A*, *B*, *C* etc. zieht) einen Druck in *B*

von links nach rechts: $\gamma[b + \overline{EF} - \overline{DF}] = \gamma[b - \overline{DE}]$, so wie
- rechts - links: $\gamma[b - \overline{DG}]$.

Soll nun ein Fließen von *B* nach *C* erfolgen, so muß offenbar ersterer Werth den letzteren übertreffen und zwar muß die Differenz beider, die Resultirende $= p$, wodurch gedachte Bewegung veranlaßt wird, sein:

$$p = \gamma[b + EF - DF - b + DG] = \gamma . \overline{EG}.$$

Die Druckkraft, welche pr. Flächeneinheit gegen die Flüssigkeit wirkt und diese zum Fließen bringt, wird also durch das Gewicht einer Flüssigkeitssäule gemessen, welche den Abstand der Ausflußöffnung vom Wasserspiegel im Gefäße zur Höhe hat.

Taucht die Mündung *C* unter Wasser, so wird die wirksame Druckhöhe $\overline{EG}$ durch den Abstand des Wasserspiegels über *C* vom Wasserspiegel *WW* im Gefäße *MM* bestimmt.

Außerdem ergeben sich noch folgende wichtige Sätze:

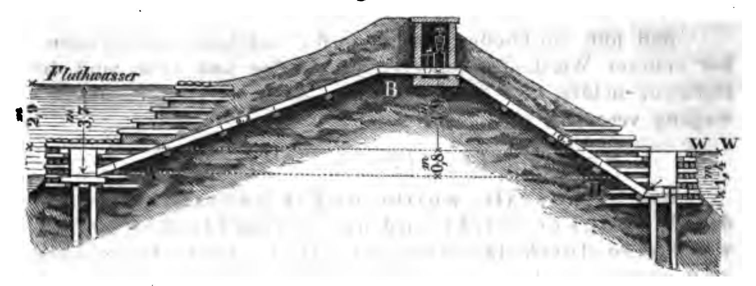
1. Es findet so lange ein Abfluß durch den Heber statt, als der Ausflußpunct *C* noch tiefer wie der Wasserspiegel *WW* im Gefäße liegt. Hieraus ergiebt sich überdies, daß der Schenkel

$\overline{BC}$ auch kürzer wie der AB sein kann, ohne den Ausfluß zu stören.

2. Der Abstand des Wasserspiegels WW im Gefäße vom Scheitel B oder höchsten Puncte des Hebers muß kleiner wie b d. i. kleiner wie $10^m,366$ sein, da der in B von links nach rechts wirksame Druck $\gamma(b - \overline{DE})$ nicht negativ sein darf, also $b > \overline{DE}$ erfordert wird.

Zusatz. In dem Gebiete des Maschinenwesens und der Baukunst macht man um Wasser über Höhen (nicht auf Höhen) zu heben, von dem Heber mannigfachen nützlichen Gebrauch. So benutzt man ihn, um den Locomotivkesseln von den Tendern aus Wasser zuzuführen *), als selbstfüllenden Heber (wie er schon den Alten unter dem Namen »diabetes« bekannt war) zur Hahnsteuerung bei Maschinen etc. Ferner um überflüssiges Wasser aus Behältern abzulassen (wie beim Canale von Languedoc **), oder Wasser über Höhen zu leiten, wo ein Fortleiten in Röhren durch die Höhen nicht möglich, oder, der örtlichen Umstände wegen, nicht räthlich ist. Eine Anordnung letzterer Art zeigt Fig. 56. Das dort bemerkte Fluthwasser gehört der Schelde an, der Graben WW, welcher von diesem Wasser gespeist werden soll, gehört zum Marienfort unterwärts Antwerpen etc. ***)

Fig. 56.



Der ganze Heber $ABCD$ wird von einer gußeisernen $0^m,2$ weiten Röhre gebildet. Um den Heber in Thätigkeit zu setzen, d. h. um die in der Röhre $ABCD$ enthaltene Luft auszutreiben und Wasser eintreten lassen zu können, ist auf der höchsten Stelle bei B eine entsprechende Saugpumpe angebracht. Die wirksame Druckhöhe ist hierbei $2_m,9$.

*) Heusinger, Organ für Eisenbahnkunde.

**) Gerstner, Mechanik, Bd. 2, S. 269, Tafel 52.

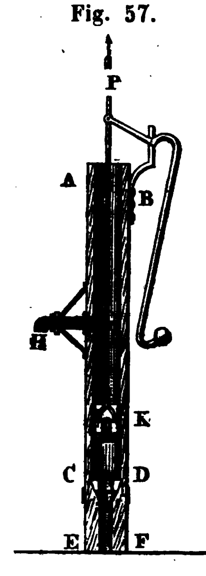
***) Förster, Bauzeitung 1852, S. 260.

§. 57.

Pumpen (Kolbenpumpen).

Es sei $ABCD$, Fig. 57, der Kolbencylinder (Stiefel) einer Wasserpumpe mit durchbrochnem Kolben K, so wie $CEFD$ das unterwärts angebrachte (in der Abbildung verkürzte) Saugrohr mit dem Saugventile bei CD. Man soll die Größe der in der Kolbenstange anzubringenden Kraft P bestimmen, welche, wenn von allen sogenannten passiven Widerständen (auch vom Gewichte des Kolbens) abgesehen wird, den Kolben in einer bestimmten Lage im Gleichgewicht zu halten im Stande ist.

Fig. 57.



Auflösung. Nehmen wir an, es sei der ganze Raum GCF der Pumpe mit Wasser gefüllt, der Kolben K im Aufsteigen begriffen und für einen Augenblick in der gezeichneten Stelle festgehalten, die Ventile im Kolben geschlossen, dagegen das Saugventil CD geöffnet. Wird dann der Kolbendurchmesser mit D, die den Atmosphärendruck messende Wassersäule mit $b(=10^m,336)$ bezeichnet und $\frac{\pi}{4}=0,785=\pi'$ gesetzt, so beträgt, mit Bezug auf die Figur, das auf die obere Kolbenfläche drückende Gewicht:

$$(1)\quad \gamma D^2\pi^1 [b+\overline{GK}],$$

während die untere Kolbenfläche einen Druck erfährt, der gleich ist:

$$(2)\quad \gamma D^2\pi^1 [b-\overline{KF}].$$

Wird (2) von (1) abgezogen, so erhält man für die zu bestimmende Kraft P den Werth:

$$P=\gamma D^2\pi^1 [\overline{GK}+\overline{KF}], \text{ d. i.}$$

$$P=\gamma D^2\pi^1 . \overline{FG}.$$

Die Kraft, welche den Kolben beim Aufgange in jeder beliebigen Lage im Gleichgewicht zu erhalten vermag (oder die Kraft zum Aufziehen bei gleichförmiger Bewegung) ist gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, welche den Querschnitt des Kolbens zur Basis und den Abstand des Unterwassers vom Ausgußpuncte zur Höhe hat.

Die Kraft, welche beim Niedergange den Kolben im Gleichgewichte zu erhalten im Stande ist, hat nur die oben bemerkten passiven Widerstände, als Kolbenreibung, Durchgang des Wassers durch die Ventile, Anhängen des Wassers an den Röhrenwänden etc. zu überwinden und, da von diesen Widerständen hier (zunächst) abgesehen werden soll, so kann von einer derartigen Kraft weiter nicht die Rede sein.

Zusatz 1. Für die gewöhnlichen practischen Fälle läßt sich, mit Beachtung der passiven Widerstände setzen:

$$\text{Aufgang: } P = 1\tfrac{1}{12} D^2\pi_1 H \text{ bis } 1\tfrac{1}{8} D^2\pi_1 H;$$
$$\text{Niedergang: } P_1 = \tfrac{1}{12} D^2\pi_1 H \quad - \quad \tfrac{1}{8} D^2\pi_1 H.$$

Die pr. Sec. aufzuwendenden mechanischen Arbeiten sind daher, wenn v die mittlerere Geschwindigkeit des Kolbens bezeichnet:

$$L = Pv \text{ und } L_1 = P_1 v.$$

Zusatz 2. Eben so interessante als technisch wichtige Fragen sind die nach der Steighöhe des Wassers bei jedem Hube, nach der größten Steighöhe und den Anordnungen, welche man zu treffen hat, um den Nachtheil des sogenannten schädlichen Raumes — d. h. des bei jedem Hube zwischen der unteren Kolbenfläche und dem Stiefelboden verbleibenden Raumes — möglichst herabzuziehen.

Für diese Betrachtungen sei l der Kolbenhub, e der schädliche Raum, A der Stiefel- und a der Saugrohrquerschnitt, λ die Länge des Steigrohres und x_1 die Steighöhe des Wassers am Ende des ersten Kolbenhubes, endlich b wiederum $= 10^m,336$.

Bevor noch Wasser in die Pumpe tritt, der Kolben aber bis zum tiefsten Puncte herabgedrückt ist, besitzt die im Raume unter dem Kolben bis zum Unterwasser befindliche Luft

$$(1) \quad \begin{cases} \text{ein Volumen} = \lambda a + eA \text{ und} \\ \text{eine Pressung} = b. \end{cases}$$

Nachdem der Kolben ganz erhoben und das Wasser im Saugrohre auf x_1 Höhe gestiegen ist, hat diese Luft

$$(2) \quad \begin{cases} \text{ein Volumen: } A(l+e) + a(\lambda - x_1) \text{ und} \\ \text{eine Spannung: } b - x_1. \end{cases}$$

Für die Bestimmung von x_1 erhält man daher, nach dem Mariotte'schen Gesetze, ohne Weiteres die Proportion:

$$(3) \quad Ae + a\lambda : A(l+e) + a(\lambda - x_1) = b - x_1 : b.$$

Wird jetzt der Kolben abermals ganz niederwärts bewegt, so verbleibt endlich nach dem Schlusse des Saugrohres zwischen diesem und der unteren Kolbenfläche ein Luftvolumen Ae von

der Atmosphärenpressung $= b$. Dagegen verbleibt im Saugrohre ein Luftvolumen $= a(\lambda - x_1)$ von der Pressung $= b - x_1$.

Dies letztere Volumen ist zur Bestimmung der Steighöhe $= x_2$ beim zweiten Kolbenhube, auf ein Volumen $= z$ von der Atmosphärenpressung $= b$ zu reduciren und sodann mit Ae zu vereinigen. Hierzu ist

$$Z : a(\lambda - x_1) = (b - x_1) : b, \text{ d. i.}$$

$$Z = \frac{a(b - x_1)(\lambda - x_1)}{b} \ldots$$

Daher das von dem zweiten Aufzuge des Kolbens in der Pumpe überhaupt eingeschlossene Luftvolumen von Atmosphärenpressung $= b$:

$$(4) \quad Ae + \frac{a(b - x_1)(\lambda - x_1)}{b}.$$

Ist sodann der zweite Kolbenaufgang vollendet und ist dabei das Wasser in der Saugröhre auf die Höhe x_2 gestiegen, so besitzt die in der Pumpe abgesperrte Luft

$$(5) \quad \begin{cases} \text{ein Volumen: } A(l + e) + a(\lambda - x_2) \text{ und} \\ \text{eine Spannung: } b - x_2. \end{cases}$$

Aus (4) und (5) erhält man daher zur Bestimmung von x_2:

$$(6) \quad \frac{Aeb + a(b - x_1)(\lambda - x_1)}{b} : A(l + e) + a(\lambda - x_2) = b - x_2 : b.$$

Hieraus wird man leicht erkennen, daß nach dem n^{ten} Kolbenaufgange die Steighöhe $= x_n$ aus der Proportion zu reduciren ist:

$$\text{I.} \quad \frac{Aeb + a(b - x_{n-1})(\lambda - x_{n-1})}{b} : A(l + e) + a(\lambda - x_n) := b - x_n : b$$

Die Existenz dieser Proportion ist zunächst an die Bedingung geknüpft, daß $x_{n-1} < b$ sei. Stellt man sich daher unter x_{n-1} die größte Steighöhe $= X$ des Wassers vor, so wird zur Bestimmung von X auch $x_n = X$ zu setzen sein. Führt man letztere Größe in I ein und reducirt auf dieselbe, so folgt endlich:

$$X = \frac{bl}{e + l} = \frac{b}{1 + \frac{e}{l}}.$$

Die größte Saughöhe einer Pumpe kann daher niemals die Höhe einer Säule von der Dichte der zu habenden Flüssigkeit erreichen, welche dem Drucke einer Atmosphäre das Gleichgewicht hält. Es wird also $X < 10^{\text{m}},336$ für Wasser, $X < 0^{\text{m}},76$

für Quecksilber etc. Ferner tritt, unter sonst gleichen Umständen, der schädliche Raum um so weniger nachtheilig auf, je größer man den Kolbenhub macht.

Für $e = \frac{1}{4}$ Fuß und $b = 35{,}4$ Fuß (hannov.), ergiebt sich:

$X = 28{,}32$ Fuß, wenn $l = 1$ Fuß,

$X = 32{,}67$ Fuß, wenn $l = 3$ Fuß ist.

Zusatz 3. Luftpumpe. Bezeichnet V den Inhalt des Recepienten und v den des Stiefels einer Luftpumpe, so erhält man:

A. Für die Verdünnungspumpe die Dichte $= x_1$ nach dem ersten Zuge aus der Proportion:

$$V:(V+v) = x_1 : b, \text{ d. i.}$$

$$x_1 = b\left(\frac{V}{V+v}\right).$$

Eben so für die Dichte $= x_2$ nach dem zweiten Zuge:

$$V:(V+v) = x_2 : x_1$$

$$\lambda_2 = x_1\left(\frac{V}{V+v}\right) = b\left(\frac{V}{V+v}\right),$$

daher nach dem $n$ten Kolbenzuge die Dichte x_n:

$$x_n = b\left(\frac{V}{V+v}\right)^n.$$

B. Für die Verdichtungs- (Compressions-) Pumpe ergiebt sich, in ähnlicher Weise verfahren, die Dichte nach n Kolbenzügen zu:

$$x_n = \frac{V+nv}{V}.$$

In beiden Fällen A. und B. ist der schädliche Raum der Pumpen unbeachtet geblieben.

Beispiel. Bei der atmosphärischen Eisenbahn von Kingston nach Dalkey in Irland beträgt der cubische Inhalt der 7470 Fuß (engl.) langen und 15 Zoll im Durchmesser haltenden, zwischen den Bahnschienen liegenden Triebröhre (incl. $5\frac{0}{0}$ wegen Nichtdichten derselben) 9630 Cubikfuß. Der Inhalt des dortigen Luftpumpenstiefels (bei 67 Zoll Durchmesser und 66 Zoll Hub) ist gleich 134,66 Cubikfuß. Es fragt sich, wie viel Spiele die Luftpumpe machen muß, wenn die Luft aus der Triebröhre bis auf 15 Zoll Quecksilbersäule ($\frac{1}{2}$ Atmosphäre Spannung) ausgepumpt werden soll?

Auflösung. Setzen wir $V = 9630$, $v = 138$, ferner $x_n = 15$, $b = 30$, so folgt aus A. Zusatz 2:

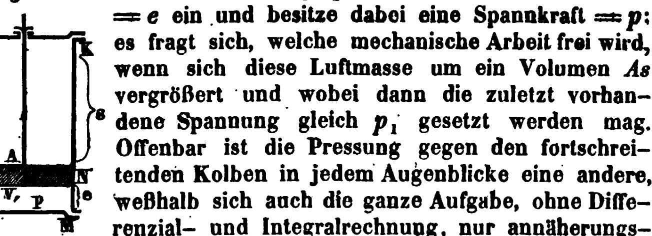
$$n = \frac{log.30 - log.15}{log.9765 - log.9630} = 49{,}95.$$

§. 58.

Arbeit, welche beim Ausdehnen eines bestimmten Luftvolumens frei wird, oder beim Zusammendrücken desselben aufgewandt werden muß.

Es sei ein Luftvolumen V von der Pressung $= p$ ursprünglich in einem Cylinder unter einem Kolben, Fig. 58, vom Querschnitte $= A$ abgesperrt, nehme dort eine Höhe $= e$ ein und besitze dabei eine Spannkraft $= p$; es fragt sich, welche mechanische Arbeit frei wird, wenn sich diese Luftmasse um ein Volumen As vergrößert und wobei dann die zuletzt vorhandene Spannung gleich p_1 gesetzt werden mag. Offenbar ist die Pressung gegen den fortschreitenden Kolben in jedem Augenblicke eine andere, weßhalb sich auch die ganze Aufgabe, ohne Differenzial- und Integralrechnung, nur annäherungsweise lösen läßt und daher im Voraus, hinsichtlich der allgemeinen Behandlung, auf folgende Paragraphen verwiesen werden muß.

Fig. 58.



Die bemerkte Annäherungsrechnung läßt sich aber unmittelbar nach §. 27 der Geodynamik machen. Um dabei auf einen zuerst von Poncelet *) entwickelten Ausdruck zu kommen, denken wir uns den Weg der Ausdehnung s in zwei gleiche Theile getheilt und bezeichnen zuvörderst die Pressung in der Mitte dieses Weges mit p_2, so daß die durch die bemerkte Ausdehnung entwickelte mechanische Arbeit $= L$ dargestellt wird durch:

$$L = \tfrac{1}{3}\,\frac{s}{2}\,.\,A\,[p + 4p_2 + p_1].$$

Um hieraus s und p_2 zu entfernen, liefert das Mariotte'sche Gesetz unmittelbar folgende zwei Proportionen, wobei man sich erinnern mag, daß beim Uebergange zur Pressung p_1 von der p aus, eine unveränderte Temperatur vorausgesetzt ist:

$$e : e + \frac{s}{2} = p_2 : p;\quad e : e + s = p_1 : p.$$

---

*) Industrielle Mechanik nach Poncelet. Deutsch bearbeitet von Kuppler und Hallbauer. 2r Theil. S. 363.

woraus

$$s = \frac{e}{p_1}(p - p_1),\ p_2 = \frac{2pp_1}{p+p_1}$$

und deshalb

$$L = \frac{Ae}{6} \cdot \frac{p-p_1}{p} \left\{ p + \frac{8pp_1}{p+p_1} + p_1 \right\} \text{ folgt.}$$

Nach einiger Umformung und wenn $Ae = V$ gesetzt wird, erhält man:

$$L = \frac{Vp}{6} \left\{ \frac{p}{p_1} + \frac{8(p-p_1)}{p+p_1} - \frac{p_1}{p} \right\}.$$

Die Größe dieser Arbeit ist übrigens auch der gleich, welche erforderlich sein würde, das der Pressung p_1 entsprechende Volumen V_1 auf das ursprüngliche Volumen V von der Pressung p zusammenzudrücken.

Beispiel. Ein Cylindergebläse soll für den Bedarf eines Schmelzofens pr. Secunde 15 (engl.) Cubikfuß atmosphärische Luft von einer Pressung liefern, welche durch $2\frac{1}{2}$ Zoll vom Quecksilbermanometer des Regulators gemessen wird; es fragt sich, welche in Pferdekräften (à 550 Fß℔) ausgedrückte mechanische Arbeit hierzu aufzuwenden ist, wenn der Barometerstand der äußeren Luft 30 Zoll (Quecksilbersäule) beträgt und die passiven Widerstände zu $40\frac{0}{0}$ in Anschlag gebracht worden.

Auflösung. Hier ist $V = 15$; $p = 14{,}7.144 = 2116{,}8$ ℔; $pV = 31752$; $\frac{p}{p_1} = \frac{30+2\frac{1}{2}}{30} = \frac{13}{12} = 1{,}0833$; $\frac{p_1}{p} = 0{,}9231$; $\frac{8(p-p_1)}{p+p_1} = 0{,}3198$; folglich:

$$L = 31752 \left\{ \frac{1{,}0833 + 0{,}3198 - 0{,}9231}{6} \right\} = 0{,}08.31752 = 2540{,}16 \text{ Fß℔}$$

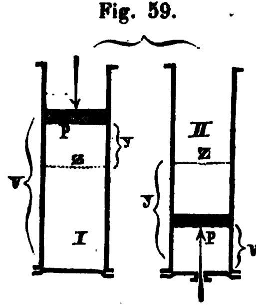
$$= \frac{2540{,}16}{550} = 4{,}61 \text{ Pferdekräfte als reine Nutzarbeit, oder}$$

$$\frac{4{,}61}{0{,}6} = 7{,}51 \text{ Pferdekräfte als Totalarbeit.}$$

[§. 59.]

Die strengere Auflösung der Aufgabe des vorigen §. geschieht wie nachstehend. Es sei z die veränderliche Pressung auf die Einheit des Kolbens am Ende eines beliebigen Weges $= s$. Innerhalb des nächstfolgenden unendlich kleinen Wegelementes $= ds$ wird man z als constant ansehen dürfen und daher die elementare Arbeiten ausdrücken können durch:

$$(1)\quad dL = Azds = zdv,$$



wo dv das Element des elastischen Volumens darstellt.

Wir entwickeln zuerst die zum Zusammendrücken erforderliche Arbeit.

Mit Bezug auf Fig. 59, Nr. I, bezeichne hierzu V_1 das ursprüngliche Volumen von der Pressung p_1, welches auf das Volumen V von der Pressung p zusammengedrückt werden soll. Ferner sei y das variabele Volumen für den Fall, daß die Pressung gegen den fortschreitenden Kolben zu z angewachsen ist.

Sodann folgt:

$$dv = d(V_1 - y) = -dy, \text{ daher aus (1)}$$

$$dL = -z dy, \text{ oder wegen } z : p_1 = V_1 : y,$$

$$\text{also } z = \frac{p_1 V_1}{y}, \text{ auch}$$

$$dL = -p_1 V_1 \frac{dy}{y}, \text{ d. i.}$$

$$L = -p_1 V_1 \int_{V_1}^{V} \frac{dy}{y} = -p_1 V_1 \, lgnt \frac{V}{V_1}, \text{ oder}$$

$$L = p_1 V_1 \, lgnt \frac{V_1}{V}, \text{ oder auch}$$

$$\text{I.} \quad L = p_1 V_1 \, lgnt \frac{p}{p_1}.$$

Für den Fall, daß sich das Volumen V von der Pressung p so weit **ausdehnt**, daß ein Volumen V_1 von der Pressung p_1 entsteht, erhält man die dabei frei gewordene mechanische Arbeit auf ganz demselben Wege. Mit Bezug auf II., Fig. 59, ist hier zuvörderst:

$$dL = z dy = p V \frac{dy}{y}, \text{ folglich:}$$

$$L = p V \int_{V}^{V_1} \frac{dy}{y} = p V \, lgnt \frac{V_1}{V}, \text{ oder}$$

$$\text{II.} \quad L = p V \, lgnt \frac{p}{p_1}.$$

Dem Mariotte'schen Gesetze zufolge ist $pV = p_1 V_1$, weshalb aus der Vergleichung von I. mit II. bestimmt hervorgeht, daß die Arbeit, welche erfordert wird, um ein bestimmtes Luftvolumen auf einen bestimmten Raum zusammenzudrücken, eben so groß ist, als die Arbeit,

welche frei wird, sobald sich das zusammengedrückte Volumen wieder bis zur ursprünglichen Raumgröße ausdehnen kann.

Mit Bezug auf den vorigen §. folgt überdies noch, daß annäherungsweise gesetzt werden kann:

$$lgnt\,\frac{p}{p_1} = \frac{1}{6}\left\{\frac{p}{p_1} + \frac{8(p-p_1)}{p+p_1} - \frac{p_1}{p}\right\}.$$

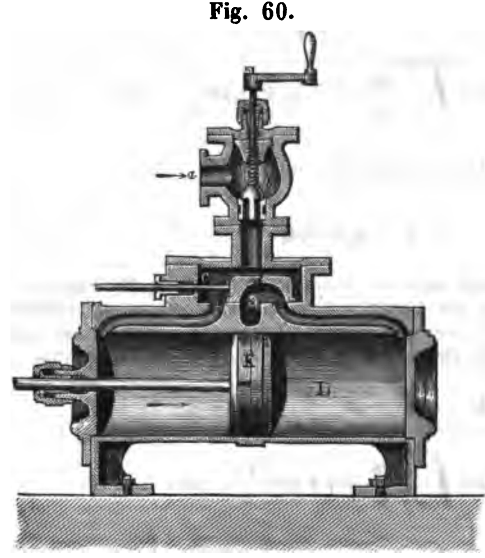
Wendet man die Gleichung I auf das Beispiel des vorigen §. an, so erhält man, wegen $lgnt\ 1{,}08$ *) $= 0{,}076961 \cdot L = 31752 \cdot 0{,}076961 = 2443{,}7$ Fß𝔈 $= 4{,}44$ Pferdekräfte netto oder 7,4 Pferdekräfte brutto, wornach einigermaßen der Werth der vorigen Annäherungsformel beurtheilt werden kann.

§. 60.

Dampfmaschine.

Wir sind nunmehr in den Stand gesetzt, die Größe der Arbeit zu berechnen, welche vom Wasserdampfe auf den Kolben einer Dampfmaschine übertragen werden kann. Hierzu stelle zuvörderst Fig. 60 den Längendurchschnitt und Fig. 61 den Querdurchschnitt eines Dampfmaschinencylinders nebst dem Dampfzuführ und Steuerapparat dar, wobei angenommen werden mag, daß der Dampf, nachdem er gegen den Kolben gewirkt hat, ungehindert in die freie Luft entweicht.

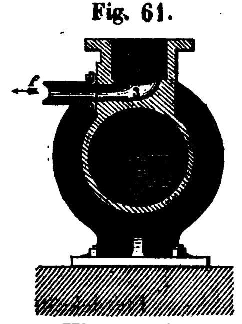
Fig. 60.



Der frische Dampf gelangt durch *a*, bei geöffnetem Ventile *b* in den Dampf- oder Schieberkasten *c* von hier, bei der gezeichneten Stellung des Schiebers *d*, im Canale 1 fortgehend, endlich in den Cylinder, woselbst er sein Bestreben dahin äußert, den Kolben *k* von links nach rechts fortzuschieben. Während dieser Zeit entweicht

*) Nach den Prony'schen Tafeln meiner Logarithmen.

Fig. 61.



der im Raume L befindliche Dampf durch die Canäle 2, 3 und das Rohr f in die freie Luft. Für die entgegengesetzte Bewegung erhält der Schieber d eine derartige Stellung, daß der Raum c mit 2 und 1 mit 3 etc. communicirt.

Um die gestellte Aufgabe möglichst allgemein zu lösen, werde zuvörderst angenommen, es arbeite die Dampfmaschine mit Absperrung, d. h. es werde der Dampfzufluß lange vorher unterbrochen, ehe der Kolben das Ende seines Weges erreicht hat. Hierzu sei ferner D der Durchmesser des Kolbens, e der Weg desselben vor des Absperrung, alle übrigen Bezeichnungen sonst die im vorigen §. gewählten.

Bis zum Augenblick der Absperrung trägt der Dampf auf den Kolben die Arbeit über:

$$(1) \quad p \,.\, D^2 \pi' \,.\, e = pV.$$

Unter der Voraussetzung, daß der abgesperrte Dampf dem Mariotte'schen Gesetze folgt *), beträgt die während der Absperrung, bis die Pressung p zu p_1 geworden ist, nach dem vorigen Paragraphen:

$$(2) \quad pV \, lgnt \frac{p}{p_1}.$$

Endlich die Arbeit, welche zur Ueberwindung des Widerstandes der vorhandenen atmosphärischen Luft erforderlich ist, wenn p_2 den Druck dieser Luft pr. Flächeneinheit bezeichnet und wegen $\frac{V_1}{V} = \frac{p}{p_1}$,

$$(3) \quad p_2 V_1 = \frac{p_2}{p_1} pV.$$

*) Für die Praxis, insbesondere wenn man den Dampfcylinder von Außen mit Dampf umgiebt, eine völlig zulässige Annahme, wie auch Morin (Leçons de mécanique pratique III. Partie) durch Versuche nachgewiesen hat. Pambour behauptet, daß sich der abgesperrte Dampf gerade so viel abkühlt als erforderlich ist, um die §. 54 hervorgehobene Abhängigkeit zwischen Temperatur und Spannkraft des gesättigten Dampfes für jeden Augenblick der Ausdehnung immer wieder herzustellen. Eine noch andere (jedenfalls die allgemeinste) Berechnungsweise der Arbeit einer Dampfmaschine giebt Holtzmann in seiner bereits citirten Schrift: „Ueber die Wärme und Elasticität der Gase und Dämpfe." S. 34.

Daher die Arbeit, welche durch V Volumen Dampf entwickelt wird, wenn man 1 bis mit 3 zusammenfaßt:

$$L = pV \left\{ 1 + lgnt \frac{p}{p_1} - \frac{p_2}{p_1} \right\}.$$

Hieraus endlich, wenn der Kolben pr. Minute n einfache Spiele macht und k einen Coefficienten bezeichnet, welche die Correction der Rechnung wegen bisheriger Nichtbeachtung der sogenannten passiven Widerstände verrichtet:

$$\text{(engl. Maße)}: L = \frac{knpV \left\{ 1 + lgnt \frac{p}{p_1} - \frac{12.14,7}{p_1} \right\}}{33000} \text{ Pferdekräfte;}$$

$$\text{(franz. Maße)}: L = \frac{knpV}{75} \left\{ 1 + lgnt \frac{p}{p_1} - \frac{1,0336}{p_1} \right\} \text{ Pferdekräfte.}$$

In ersterer Formel sind die Pressungen p und p_1 in engl. ℔ pr. engl. Quadratfuß, in letzterer in Kil. pr. Quadratcentimeter vorausgesetzt.

Beispiel. Es sei der Durchmesser des Dampfkolbens 19″ folglich die Fläche = 283,53 □″ = 1,967 □′, der Hub 27 Zoll = $\frac{9}{4}$ Fuß, die Dampfspannung im Kessel = 5 Atmosphären, die Zahl der einfachen Spiele pr. Minute = 200 und nach je $\frac{1}{3}$ des Kolbenweges werde die Dampfzuführung abgesperrt. Endlich werde $k = 0,6$ angenommen.

Auflösung. Hiernach ist $V = \frac{3}{4} . 1,967$; $p = 5.14,5.144$; $\frac{p}{p_1} = 3$ also $p_1 = 24,5$; $\frac{p_2}{p_1} = \frac{14,7}{24,5}$ und daher:

$$L = 85,28 \text{ Pferdekräfte.}$$

Mittelst der Annäherungsformel §. 59 für $lgnt \frac{p}{p_1}$ würde man

$$L = 85,90 \text{ Pferdekräfte gefunden haben.}$$

Arbeitet dieselbe Maschine unter sonst gleichen Umständen ohne Expansion, so wird $p = p_1$, $V = \frac{9}{4} . 1,967$ und

$$L = 136,26 \text{ Pferdekräfte.}$$

Hierbei muß bemerkt werden, daß der Vortheil der Absperrung (Expansion) auch nicht in einem Gewinne an mechanischer Arbeit, sondern an Ersparung von Brennmaterial liegt.

[§. 61.]

Druck und Dichte in verschiedenen Höhenpuncten einer elastischen Flüssigkeitssäule, welche allein der Schwerkraftswirkung unterworfen ist.

Setzt man in Bezug auf die allgemeine Gleichung I. §. 6 voraus, daß die Raumcoordinatenaxe Z mit der Schwerkraftsrichtung zusammenfällt, so ist $X = Y =$ Null, $Z = -g$ und, da ferner η statt γ zu schreiben sein wird, endlich nach §. 53 aber $\eta = \frac{p}{k}$ ist, ergiebt sich überhaupt aus gedachter Gleichung:

$$(1) \quad dp = -\frac{p}{gk} \cdot gdz, \text{ d. i.}$$

$$k \cdot \frac{dp}{p} = -dz.$$

Liegt der Coordinatenursprung A, Fig. 62, auf einer festen Fläche und findet im Abstande $AB = h$ die Pressung P, in der Entfernung $AC = z$ aber die Pressung $= \Pi$ statt, so folgt:

Fig. 62.

$$k \int_P^\Pi \frac{dp}{p} = -\int_h^z dz, \text{ d. i.}$$

$$k \, lgnt \frac{\Pi}{P} = -(z-h), \text{ woraus}$$

$$\text{I.} \quad \Pi = Pe^{-\frac{1}{k}(z-h)}, \text{ oder}$$

$$\text{II.} \quad P = \Pi e^{\frac{1}{k}(z-h)}$$

und weiter sich ergiebt:

$$\text{III.} \quad \eta = \frac{1}{k} Pe^{-\frac{1}{k}(z-h)}$$

Annäherungsweise läßt sich für geringe Werthe von $z - h$ setzen:

$$e^{\frac{1}{k}(z-h)} = 1 + \frac{z-h}{k},$$

weshalb aus II. wird:

$$P = \Pi + \frac{\Pi}{k}(z-h), \text{ d. i., wegen } \frac{\Pi}{k} = \eta,$$

$$\text{IV.} \quad P = \Pi + \eta(z-h).$$

Aus letzterer Gleichung ergiebt sich aber folgender Satz:

„Der Druck auf die Flächeneinheit in einem Puncte B einer elastischen Flüssigkeitssäule AC, ist gleich dem Drucke im höchsten Punct C derselben, vermehrt um das Gewicht des Flüssigkeitsprismas, vom Querschnitt gleich Eins, welches die Differenz der Abstände der Puncte B und C zur Höhe hat.“

Es ist daher IV. ganz derselbe Ausdruck für luftförmige Flüssigkeiten, wie §. 9 für wasserförmige gefunden wurde.

Auf ähnliche Weise findet man aus III:

$$\eta = \frac{P}{k} - \frac{P(z-h)}{k^2},$$

oder weil $\frac{1}{k^2}$ ein sehr kleiner Werth ist:

$$\text{V.} \quad \eta = \frac{P}{k}, \text{ d. h.}$$

bei **sehr** geringen verticalen Erhebungen wird auch die elastische Flüssigkeit, annäherungsweise, als gleich dicht betrachtet werden können.

Zusatz. Vorstehende Entwickelungen gelten nur für Flüssigkeitssäulen von solchen Höhen, innerhalb welchen die Schwerkraft als eine constante Kraft betrachtet werden kann, ferner unter Voraussetzung überall gleicher Temperatur und für die geographische Breite, wofür η berechnet wurde.

Bei ganz beliebigen Höhen und mit Beachtung der letztbemerkten Umstände gestalten sich die betreffenden Rechnungen folgendermaßen.

Zuerst ist nach Regnault*) (und §. 61 Geodynamik) für eine beliebige geographische Breite das Gewicht η eines Cubikmeters atmosphärische Luft bei 0m,76 Barometerstande oder 10336 Kil. Pressung pr. □ Meter, Null Grad Temperatur und an dem Spiegel des Meeres:

$$\eta = 1{,}292673\,(1 - 0{,}002837 \,.\, \cos 2\varphi),$$

wenn φ die geographische Breite bezeichnet.

Für die mittlere Temperatur $= \tau$ in der ganzen Flüssigkeitssäule und für die Pressung $= q$ auf jeden Quadratmeter:

$$\eta = \frac{1{,}292673\,(1-0{,}002837 \cos 2\varphi)\, p}{10336\,(1+\delta\tau)}.$$

Fig. 63.

Hiernach sei AMN, Fig. 63, eine Luftsäule von der Höhe $AN = z_n$ über der Oberfläche der Erde. Die Pressung in einer beliebigen Schicht D, deren Höhe $AD = z$ ist, sei $= p$, die Acceleration der Schwerkraft daselbst $= G$.

Zufolge §. 14 Geodynamik erhält man vorerst, wenn der mittlere Erdradius $= 6366198$ Meter mit r bezeichnet wird: $G = \frac{gr^2}{(r+z)^2}$. Ferner wenn man wiederum setzt: $\eta = \frac{p}{k}$ also

$$(2) \quad k = \frac{10336(1+\delta\tau)}{1{,}292673\,(1-0{,}002837 \cos 2\varphi)}$$

nach (1) dieses §:

*) a. a. O. S. wobei der Coefficient 0,002837 nach Biot genommen ist.

$$dp = -\frac{p}{gk} \cdot \frac{gr^2}{(r+z)^2} \cdot dz, \text{ d. i.}$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{r^2}{k} \frac{dz}{(r+z)^2}.$$

Bezeichnet man die Pressung in einer Schicht mn im Abstande $= z_0$ von der Erdoberfläche mit p_0, und die Pressung in der Schicht MN mit p_n, so liefert letztere Gleichung durch Integration den Ausdruck:

$$lgnt\,\frac{p_0}{p_n} = \frac{r^2}{k} \cdot \frac{z_n - z_0}{(r+z_0)(r+z_n)}.$$

Hier $z_n - z_0 = Z$, $r + z_0 = R$ gesetzt, giebt $r + z_n = R + Z$, also:

$$lgnt\,\frac{p_0}{p_n} = \frac{r^2}{k} \cdot \frac{Z}{R(R+Z)}.$$

In den meisten Fällen kann man R mit r verwechseln, so daß man erhält:

$$\text{VI.} \quad lgnt\,\frac{p_0}{p_n} = \frac{r}{k} \cdot \frac{Z}{r+Z},$$

sonach auch:

$$\text{VII.} \quad p_n = p_0\, e^{-\frac{r}{k}\frac{z}{r+z}},$$

und endlich:

$$\text{VIII.} \quad \eta = \frac{p_n}{k} = \frac{p_0}{k}\, e^{-\frac{r}{k}\frac{z}{r+z}}.$$

Beispiel. Wie groß ist die Pressung der atmosphärischen Luft und wie groß das Gewicht eines Cubikmeters derselben in der Höhe von 292 Meter (= 1000 Fuß hannov.) über dem Meeresspiegel und in der geographischen Breite 52° 22′ 15″ (Egidienkirche in Hannover)?

Auflösung. Zuerst berechnet sich $k = 8528$; $\frac{r}{k} = 746{,}5$; $\frac{r}{k}\frac{z}{r+z} = 0{,}03423$. Sodann ist

$$p_n = \frac{p_0}{e^{0{,}03423}} = \frac{p_0}{1{,}0348} = \frac{10336}{1{,}0348} = 9988{,}4 \text{ Kil. pr. } \square \text{ Meter};$$

endlich

$$\eta = \frac{10336}{1{,}0348 \,.\, 8528} = 1{,}17115 \text{ Kil.}^{*)}$$

*) Ein hannoverscher Cubikfuß Luft wiegt daher in 1000 Fuß Höhe unter den obigen Umständen:
0,06240 ℔ = 1,9968 Loth oder in runder Zahl = 2 Loth.

[§. 62.]

Höhenmessen mit dem Barometer. Die im vorigen §. gefundenen Gleichungen lassen sich mit Anbringung einiger Correctionen zur Berechnung von Höhen (oder Tiefen) an der Oberfläche unserer Erde verwenden, sobald es möglich war, die Barometerstände an dem oberen und unteren Endpuncte (Station) und die betreffenden Temperaturen von Quecksilber und Luft für dieselben Zeiten zu beobachten.

Eine betreffende, von Laplace *) hierzu abgeleitete Formel, die als Ziel nachstehender Rechnungen betrachtet werden soll, ist folgende:

$$Z = A(1 + 0{,}002845 \,.\, \cos 2\varphi)\left[1 + \frac{t_0 + t_n}{500}\right]$$

$$\left\{\left(1 + \frac{Z}{r}\right)\log.\frac{b_0}{b_n\left[1 + \frac{\tau_0 - \tau_n}{5550}\right]} + 0{,}8686\,\frac{Z}{r}\right\}.$$

Hierbei sind die Bezeichnungen des vorigen §. beibehalten und von den neuen Größen ist A ein Zahlenwerth (der barometrische Coefficient), die Buchstaben mit den Indexen Null und n beziehen sich respective auf die untere und obere Station, ferner sind die Lufttemperaturen mit t, die Quecksilbertemperaturen mit τ und die Barometerstände mit b bezeichnet.

Zur Ableitung dieser Gleichung benutzen wir den vorher unter VI. gefundenen Ausdruck

$$(1)\quad Lgnt\,\frac{p_0}{p_n} = \frac{r}{k}\,\frac{Z}{r+Z},$$

Fig. 63.

in welchem vor Allem die Pressungen p_0 und p_n durch die Quecksilbersäulen B_0 und B_n der Barometerstände in $\overline{MN}$ und $\overline{mn}$, Fig. 62, zu ersetzen sind.

Hierbei ist aber, wie im Zusatze des vorigen §. für die Luftsäule geschah, die Einwirkung der veränderlichen Schwerkraft in großen Abständen vom Erdmittel zu beachten.

Es ist daher zu setzen: $p_n = \eta B_n \left(\frac{r}{r+z_n}\right)^2$ und auch $p_0 = \eta B_0 \left(\frac{r}{r+z_0}\right)^2$. Sodann hieraus

$$\frac{p_0}{p_n} = \frac{B_0}{B_n}\,\frac{(r+z_n)^2}{(r+z_0)^2} = \frac{B_0}{B_n}\,\frac{(R+Z)^2}{R^2} = \frac{B_0}{B_n}\left(1 + \frac{Z}{R}\right)^2$$

*) Oeuvres de Laplace. Tome Quatrième, p. 328. Paris 1845.

oder wenn man wieder R durch r ersetzt:

$$\frac{p_0}{p_n} = \frac{B_0}{B_n}\left(1+\frac{z}{r}\right)^2.$$

Sodann wird aus (1)

$$lgnt\frac{B_0}{B_n}\left(1+\frac{Z}{r}\right)^2 = \frac{r}{k}\frac{Z}{r+Z}, \text{ oder}$$

auf Z im Zähler des rechten Theiles reducirt:

$$(2) \quad Z = \frac{k}{r}(r+Z)\left\{lgnt\frac{B_0}{B_n} + 2\,lgnt\left(1+\frac{Z}{r}\right)\right\}.$$

Beide Quecksilbersäulen B_0 und B_n sind von Null Grad Temperatur vorausgesetzt, was bei den wirklich am Barometer an beiden Stationen abgelesenen b_0 und b_n nicht der Fall sein wird. Es sind daher erstere durch letztere auszudrücken, denen respective die Temperaturen τ_0 und τ_n entsprechen mögen.

Sodann hat man aber ohne Weiteres nach §. 43 und §. 45

$$b_0 = B_0\left(1+\frac{\tau_0}{5550}\right);\ b_n = B_n\left(1+\frac{\tau_n}{5550}\right),$$

woraus annäherungsweise, aber genau genug, zu reduciren ist

$$\frac{B_0}{B_n} = \frac{b_0}{b_n\left[1+\frac{\tau_0-\tau_n}{5550}\right]}.$$

Deshalb wird aus (2):

$$(3) \quad Z = \frac{k}{r}(r+Z)\left\{lgnt\frac{b_0}{b_n\left[1+\frac{\tau_0-\tau_n}{5550}\right]} + 2\,lgnt\left(1+\frac{Z}{r}\right)\right\}.$$

Um den natürlichen Logarithmen des ersten Gliedes der Parenthese durch einen Brigg'schen Logarithmen auszudrücken, hat man bekanntlich ersteren mit der Zahl (dem Modul) $m = 2{,}302585$ zu multipliciren, oder durch 0,4342944 zu dividiren, so daß man statt (3) erhält:

$$(4) \quad Z = mk\left(1+\frac{Z}{r}\right)\left\{lg.\,brgg.\frac{b_0}{b_n\left[1+\frac{\tau_0-\tau_n}{5550}\right]} + \frac{2}{m}lgnt\left(1+\frac{Z}{r}\right)\right\}$$

Da in allen Fällen Z gegen r sehr klein sein wird, so läßt sich annäherungsweise $lgnt\left(1+\frac{Z}{r}\right) = \frac{Z}{r}$ setzen, daher, so wie wegen $\frac{2}{m} = 0{,}8686$, statt (4) zu schreiben ist:

$$(5)\quad Z = mk \left\{ lg.bogg.\frac{b_0}{b_n\left[1+\frac{\tau_0-\tau_n}{5550}\right]} + 0{,}8686\frac{Z}{r}\right\}\left(1+\frac{Z}{r}\right).$$

Führt man hier den Werth von k aus [§. 61] Gleichung (2) ein, beachtet, daß $\tau = \frac{t_0+t_n}{2}$ und faßt die bestimmten Größen von k mit dem Factor m in dem einzigen Coefficienten A zusammen, so wird aus (5):

$$Z = A\frac{1+\frac{\delta(t_0+t_n)}{2}}{1-0{,}002837\cos 2\varphi}\left\{ lg.brgg.\frac{b_0}{b_n\left[1+\frac{\tau_0-\tau^n}{5550}\right]} + 0{,}8686\frac{Z}{r}\right\}$$

$$\left(1+\frac{Z}{r}\right),\text{ oder auch:}$$

$$Z = A(1+0{,}002837\cos 2\varphi)\left[1+\frac{\delta(t_0+t_n)}{2}\right]\left\{ lg.brgg.\frac{b_0}{b_n\left[1+\frac{\tau_0-\tau_n}{5550}\right]} +\right.$$

$$\left. 0{,}8686\frac{Z}{r}\right\}\left(1+\frac{Z}{r}\right).$$

Streng genommen ist in letzterer Formel noch der Feuchtigkeitszustand der atmosphärischen Luft mit Hülfe der Sätze in §. 53 in Rechnung zu bringen (der ganze Ausdruck durch $1-\frac{3}{16}\frac{y}{b_n}$ zu dividiren), so wie nach §. 43 auf die Ausdehnung der (metallenen) Scala Rücksicht zu nehmen, mittelst welcher man die betreffenden Barometerstände gemessen hat.

Letztere Correction kann für gewöhnliche technische Zwecke außer Acht gelassen, erstere aber (annäherungsweise) mit Laplace *) dadurch vorgenommen werden, daß man δ (statt 0,00367) durch 0,004 ersetzt, also schreibt:

$$(5)\quad Z = A(1+0{,}002837\cos 2\varphi)\left[1+\frac{2(t_0+t_n)}{1000}\right]\left\{ lg.brgg.\frac{b_0}{b_n\left[1+\frac{\tau_0-\tau_n}{5550}\right]} +\right.$$

$$\left. 0{,}8686\frac{Z}{r}\right\}\left(1+\frac{Z}{r}\right).$$

Multiplicirt man jetzt mit dem letzten Factor $\left(1+\frac{Z}{r}\right)$ in die große Parenthese, vernachlässigt aber gedachten Factor in Bezug auf das letzte Glied, schreibt $1+0{,}002845\cos 2\varphi$ statt dem betreffenden

*) a. a. O. p. 328.

Werthe in (5), so erhält man die bereits oben aufgeführte Formel von Laplace.

Was nun den barometrischen Coefficienten A betrifft, so kann man diesen entweder berechnen, indem $A = mk$ ist (also nach unseren Zahlenwerthen = 18411 sein würde), oder, was jedenfalls vorzuziehen, als Mittelwerth aus einer großen Anzahl von Höhen Z, die trigonometrisch gemessen worden sind, berechnen. So nimmt Laplace *), nach Ramond's Messungen, $A = 18336$ Meter. Gauß **) setzt $A = 18382$ Meter u. s. w. Wir wählen letzteren Werth, machen auch überdies die Formel (5) für die bekannten Gauß'schen Tafeln zurecht, d. h. rechnen nach Réaumur Graden, vernachlässigen das Glied $0{,}8686\,\frac{Z}{r}$, welches die Correction des Quecksilbergewichtes, wegen Variation der Schwerkraft, in sich faßt und erhalten überhaupt:

$$Z = 18382^m(1+0{,}002845.\cos\varphi)\left[1+\frac{t_0+t_n}{400}\right]\left\{lg.brgg.\frac{b_0}{b_n\left[1+\frac{\tau_0-\tau_n}{4440}\right]}\right\}\left(1+\frac{Z}{r}\right)$$

Anmerkung. Die Gründe, worauf die Gauß'schen Tafeln beruhen, sind vollständig in der vierten Auflage meiner Logarithmen entwickelt, so wie auch daselbst zweckmäßige Beispiele zur Anwendung der Formel I. zu finden sind.

§. 63.

Scheinbares und wahres Gewicht der Körper.

Wie bereits §. 49 bemerkt, gilt das Princip des Archimedes auch für luftförmige Körper, so daß beim Wiegen irgend eines Körpers in der atmosphärischen Luft stets eine geringere Gewichtsangabe erhalten wird, als dies Gewicht in Wirklichkeit beträgt. Man kann deshalb auch das Gewicht eines in der atmosphärischen Luft abgewogenen Körpers sein scheinbares Gewicht, das im luftleeren Raume aber sein wahres Gewicht nennen. ***)

*) a. a. O. p. 326.

**) Bode's astronomisches Jahrbuch für 1818, S. 170.

***) Bemerkt muß hier vor Allem werden, daß sich die in Europa gebräuchlichsten Gewichtseinheiten, das Pfund und das Kilogramm, auf den luftleeren Raum beziehen, also wahres Gewicht sind, daß daher betreffende Gewichtsstücke (aus Eisen, Messing, Platina etc.), welche auf der doppelarmig gleicharmigen Wage abzuwiegenden Körpern das Gleichgewicht halten, ebenfalls wahre Gewichte darstellen und alle unsere Gewichtsangaben im practischen Leben, in Pfunden oder Kilogrammen,

Nachstehende Entwickelungen werden dazu dienen, das Gewicht Q eines Körpers für den luftleeren Raum durch Abwägen in der Luft mittels einer gewöhnlichen doppelarmigen, gleicharmigen Wage zu finden.

Bezeichnet γ die Dichte des reinen Wassers bei Null Grad Temperatur und S das specifische Gewicht des Körpers Q, so ist das Volumen von Q bei 0° C.:

$$\frac{Q}{\gamma S},$$

bei der Vemperatur t aber, wenn e die eigenthümliche Ausdehnung des Körpers Q bezeichnet:

$$\frac{Q}{\gamma S}(1+et)^3.$$

Ist nun η wie bisher die Dichte der atmosphärischen Luft bei der Temperatur t, im Augenblicke der Wägung, so verdrängt derselbe Körper ein Luftvolumen vom Gewichte:

$$\eta\frac{Q}{\gamma S}(1+et)^3.$$

Für die Gewichtsstücke, deren man sich bedient, mögen q, s, ε dasselbe bedeuten, was Q, S und e für den abzuwiegenden Körper, so findet man, daß die Gewichtsstücke ein Volumen Luft verdrängen, deren Gewicht ist:

---

streng genommen, als allein für den luftleeren Raum gültig zu betrachten sind.

Der Grund, die Gewichtseinheiten der Körper für den luftleeren Raum festzustellen, liegt einfach darin, daß man Irrungen vermeiden will, welche offenbar aus der Verschiedenheit des Gewichtes eines Körpers entstehen müssen, wenn derselbe bei verschiedenen Barometer- und Thermometerständen in der Luft gewogen wird.

Die preußische Maß- und Gewichtsordnung vom 16. Mai 1816 setzt fest, daß ein preußisches Pfund dem 66ten Theile vom Gewichte eines preußischen Cubikfußes destillirten Wassers im luftleeren Raume, bei 15° R. = 18°,75 C., gleich sei. (Eytelw. Hydrostatik, S. 148.) Nach den bereits (S. 99) angeführten französischen Bestimmungen ist 1 Kilogramm das Gewicht eines Cubikdecimeters des dichtesten Wassers (bei 4° C.) im luftleeren Raume. Das englische Pfund (Avoir dupois) = 7000 Grains, ist dadurch festgestellt, daß, durch die zur Bestimmung der Maße und Gewichte niedergesetzte Commission, 252,722 Grains gleich dem Gewichte eines Cubikzolles destillirten Wassers bei einer Temperatur von 62 F. = $16\frac{2}{3}$ C. im luftleeren Raume gefunden sind. (Poggend. Annalen der Physik. Ergänzungsband III. Stück 3. S. 342. 1853.)

$$\eta \frac{q}{\gamma s} (1 + \varepsilon t)^3.$$

Der Druck auf die eine Wagschale ist daher:

$$Q - \eta \frac{Q}{\gamma S} (1 + et)^3,$$

auf die andere:

$$q - \eta \frac{q}{\gamma s} (1 + \varepsilon t)^3.$$

Für's Gleichgewicht ergiebt sich also:

$$(1) \quad Q - \eta \frac{Q}{\gamma S} (1 + et)^3 = q - \eta \frac{q}{\gamma s} (1 + \varepsilon t)^3,$$

woraus folgt:

$$(2) \quad Q = q + \eta \frac{Q}{\gamma S} (1 + et)^3 - \eta \frac{q}{\gamma s} (1 + \varepsilon t)^3.$$

Für die meisten Fälle erhält man die Resultate genau genug, wenn man Q, im rechten Theile der Gleichung, mit q verwechselt, also setzt:

$$Q = q \left\{ 1 + \frac{\eta}{\gamma} \left[\frac{(1+et)^3}{S} - \frac{(1+\varepsilon t)^3}{s} \right] \right\}.$$

Nach §. 53 ist $\frac{\eta}{\gamma} = \frac{B}{587693,94} \cdot \frac{1}{1+\delta t}$, wenn B die Barometerhöhe im Augenblicke der Wägung in Millimetern bei Null Grad Temperatur bezeichnet und weshalb endlich folgt:

$$\text{I.} \quad Q = q \left\{ 1 + \frac{B}{587693,94 (1+\delta t)} \left[\frac{(1+et)^3}{S} - \frac{(1+\varepsilon t)^3}{s} \right] \right\}. \text{*)}$$

Beispiel. Ein Platinakörper vom spec. Gewichte = 21,1878, ward mit Messinggewichten gewogen, deren spec. Gewicht 8,0262 betrug und man fand dabei sein Gewicht in der Luft = 7716,213 Grains (7000 Grains = 1 ℔ engl. avoir du pois). Die Barometerhöhe im Augenblicke der Wägung betrug 760,35 Millimeter und das am Barometer befestigte Thermometer zeigte + 18°,3 C Die gemeinschaftliche Temperatur der Luft, des Platinkörpers und der Messinggewichte war 19°,1.

*) Weiteres über diesen höchst interessanten Gegenstand findet sich in den hier zugleich benutzten Schriften: Bessel, „Tafel zur Reduction von Abwägungen", Astronom. Nachrichten, Bd. 7, S. 373 und Schuhmacher: „Ueber die Berechnungen der bei Wägungen vorkommenden Reductionen."

Auflösung. Hier ist $q = 7716{,}213$; $B = \dfrac{760{,}35}{1 + \dfrac{18{,}30}{5550}} =$ $757{,}90$; $S = 21{,}1878$; $s = 8{,}0262$. Nach Schuhmacher ist die eigenthümliche Ausdehnung für Platina $e = 0{,}000009$, für Messing $\varepsilon = 0{,}000018785$, endlich $t = 19{,}10$.

Daher aus I. das wahre Gewicht des Platinakörpers:

$Q = [7716{,}213 + 0{,}4381 - 1{,}1598]$ Grains, oder

$Q = 7715{,}4913$ Grains $= 1{,}1022$ ℔ engl.

Zusatz 1. Specifische Gewichte. Wir sind nunmehr auch in den Stand gesetzt, die Bestimmung specifischer Gewichte, und zwar zunächst fester Körper, genauer zu machen wie §. 39 geschah, d. h. mit Rücksicht auf den Einfluß der Temperatur, des Luftdruckes und des Gewichtsverlustes der Körper in der Luft.

Hierzu sei Q das absolute und S das specifische Gewicht irgend eines festen Körpers, der mit dem Gewichte q an einer Wage im Gleichgewichte befindlich ist. Sodann erhält man nach Vorstehendem:

$$(1)\quad Q = q\,\frac{1 - \frac{\eta}{\gamma s}(1+\varepsilon t)^3}{1 - \frac{\eta}{\gamma S}(1+et)^3} = q\,\frac{t - \frac{c}{s}\,r^3}{t - \frac{c}{S}\,R^3},$$

wenn $\frac{\eta}{\gamma} = c$, $(1+\varepsilon t)^3 = r^3$ und $(1+et)^3 = R^3$ gesetzt wird.

Wiegt man Q im Wasser, so mögen, weil im Allgemeinen Wasser- und Luft-Temperatur als verschieden anzunehmen sind, die Größen q und r in (1) mit q_1 und r_1 bezeichnet werden, und wenn man überdies beachtet, daß im Wasser die Größe c im Nenner gleich der Einheit wird, so folgt:

$$(2)\quad Q = q_1\,\frac{1 - c\frac{r_1^3}{s}}{1 - \frac{R^3}{S}}.$$

Aus der Vergleichung von (1) und (2) und nach nachheriger Reduction auf S erhält man endlich:

$$\text{I.}\quad S = \frac{qR^3(s - cr^3) - q_1 cR^3(s - c_1 r_1^3)}{q(s - cr^3) - q_1(s - c_1 r_1^3)}.$$

Für die Temperaturen $=$ Null wird $r = R = 1$ und wenn man überdies auch $\eta = c = c_1 =$ Null setzt, ergiebt sich

$$S = \frac{q}{q - q_1},$$

genau die Formel, welche bereits §. 39, Zusatz 1, gefunden wurde.

Zusatz 2. Mit Hülfe der Hauptsätze gegenwärtigen Paragraphens ist es jetzt auch möglich, das Gewicht eines bestimmten Volumens Wasser im lufterfüllten Raume zu berechnen, wenn das wahre Gewicht Q desselben bei der Temperatur t bekannt ist und q das wahre Gewicht (der Messingstücke) bezeichnet, welches der bemerkten Cubikeinheit Wasser im lufterfüllten Raume das Gleichgewicht hält.

Mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen ergiebt sich hierzu ohne Weiteres die Gleichung:

$$(1)\quad Q - (\text{Gewicht der Cubikeinheit Luft bei } t^0 \text{ Temperatur und } 0^m{,}76 \text{ Barometer}) = q\left[1 - \frac{\eta}{\gamma s}(1+\varepsilon t)^3\right],$$

wo das Luftgewicht im ersten Gliede derselben Cubikeinheit entspricht, in welcher Q ausgedrückt ist.

Für den hannov. Cubikfuß Wasser, der bereits §. 45 zu $Q = 53{,}2$ berechnet wurde, und wenn q wie bemerkt Messinggewichte sind, folgt, mit Hülfe der vorhergegangenen Annahmen zuerst: Gewicht eines hannov. Cubikfußes Luft bei 18,75 Temperatur und $0^m{,}76$ Barometer $= 0{,}06446937$, sodann aber aus (1)

$$53{,}20 - 0{,}06446937 = q\left[1 - \frac{B}{1+0{,}00367.1875}\cdot\frac{(1+0{,}000018785.18{,}75)^3}{8{,}0262}\right]$$

wo $B = \dfrac{760}{1 - \dfrac{18{,}75}{5550}} = 757{,}441$ gesetzt werden muß.

Endlich findet man:

$$q = 53{,}1435 \text{ ℔ hannoversch},$$

als wahres Gewicht der Messingstücke, die einem hannoverschen Cubikfuß Wasser im lufterfüllten Raume das Gleichgewicht halten.

Anmerkung. Das absolute Gewicht des Wassers (im luftleeren Raume) ermittelt man gewöhnlich dadurch, daß man einen Körper von bekannten Volumen (gewöhnlich einen hohlen Metallblechcylinder) in demselben mit aller nur möglichen Vorsicht abwägt. Ganz speciell findet man diesen Gegenstand behandelt von Stampfer im 16. Bande (1830) der Jahrbücher des Wiener polytechnischen Institutes, S. 1 etc. Recht übersichtlich giebt ferner die hierher gehörigen Rechnungen etc. Miller in seinen Elements of Hydrostatics and Hydrodynamics, Fourth Edition, Cambridge 1850. p. 115.